Übungen zu Geometrie (LGy)

Universität Regensburg, Sommersemester 2014
Dr. Raphael Zentner, Dr. Olaf Müller

Übungsblatt 10

Abgabe bis **Freitag**, 20.06.2014, 10:00 Uhr (Kästen siehe Beschilderungen)

Aufgabe 1: Ein nicht-archimedischer Körper (6 Punkte)

Als eine rationale Funktion bezeichnet man eine Funktion der Form

$$x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)} ,$$

wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome mit reellen Koeffizienten sind, die keine gemeinsamen Nullstellen haben (wo man also nicht mehr weiter durch Linearfaktoren $(x-a)$ kürzen kann), und wo $q(x)$ nicht das Null-Polynom ist. Der Definitionsbereich ist hier das Komplement der Nullstellenmenge von $q(x)$. Man definiert nun auf der Menge K dieser rationalen Funktionen Addition $+$ punktweise und Multiplikation $\cdot$ wie folgt: Sind $f, g \in K$, die sich als $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ und $g(x) = \frac{h(x)}{k(x)}$ schreiben, so definieren wir $f \cdot g$ durch

$$x \mapsto \frac{p(x)h(x)}{q(x)k(x)} ,$$

falls kein Kürzen durch Linearfaktoren mehr möglich ist, und andernfalls als den maximal mit Linearfaktoren gekürzten Ausdruck. Man zeige, dass K ein Körper ist.
Seien nun $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ und $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0$ zwei Polynome mit $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$. Wir sagen, dass $f = \frac{p}{q} > 0$ ist, falls $\frac{a_n}{b_m} > 0$ ist. So ein f nennen wir positiv. Für zwei rationale Funktionen f, g definieren wir $f > g$, falls $f - g > 0$ ist. Man zeige, dass K mit der Relation $>$ ein angeordneter Körper ist. Das heißt, zeigen Sie zunächst, dass K mit $>$ total geordnet ist, und dass weiterhin Addition und Multiplikation verträglich mit der Ordnungsrelation sind (definieren Sie sinnvoll, was das heißen soll). Zeigen Sie nun, dass K kein archimedischer Körper ist, das heißt, es gibt positive Elemente f, g in K, so dass es keine Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$f + \cdots + f > g ,$$

wobei wir hier links die n-fache Summe von f mit sich selbst meinen.

Bemerkung: Ausgehend von diesem Körper kann man Hilbert-Ebenen mit oder ohne Parallelenaxiom konstruieren, in denen das archimedische Axiom nicht gilt.

Aufgabe 2: Kosinussatz (6 Punkte)

Beweisen Sie den Kosinussatz in Euklidischen Ebenen: Für eine Euklidische Ebene E ist die **Länge einer Strecke** $\overline{PQ}$ definiert als $L(\overline{PQ}) = l(i(P) - i(Q))$, wobei i ein Hilbertebenen-Isomorphismus zwischen E und $\mathbb{R}^2$ mit den üblichen Strecken und Bewegungen/Kongruenzen ist und l die Euklidische Längenfunktion gegeben durch $l(v) = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ für das Euklidische Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Genauso ist die **Winkelgröße eines Winkels** (h_1, h_2) (h_1, h_2 zwei Halbgeraden an einem gemeinsamen Punkt R) gegeben als $W(h_1, h_2) := \frac{\langle i(S)-i(R), i(T)-i(R) \rangle}{L(\overline{RS}) \cdot L(\overline{RT})}$ für $S \in h_1, T \in h_2$ beliebig. Zeigen Sie also, dass für jedes Dreieck ABC in E gilt:

$$L(\overline{AC})^2 + L(\overline{BC})^2 = L(\overline{AB})^2 + \cos W(\measuredangle(BCA)).$$

Aufgabe 3: Seitenhalbierende (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Seitenhalbierenden eines Dreiecks in einer Euklidischen Ebene sich in einem Punkt schneiden. Finden Sie weiterhin das Verhältnis, in dem sie sich schneiden.

Aufgabe 4: Mittelsenkrechte und Höhen (6 Punkte)

(a) Schneiden sich die Mittelsenkrechten eines Dreiecks in einer Euklidischen Ebene in einem Punkt?

(b) Schneiden sich die Höhen eines Dreiecks in einer Euklidischen Ebene in einem Punkt? **Hinweis:** Ziehen Sie geeignete Parallelen und verwenden Sie den ersten Teil der Aufgabe!