Übungen zu Geometrie (LGy)

Universität Regensburg, Sommersemester 2014
Dr. Raphael Zentner, Dr. Olaf Müller

Übungsblatt 11

Abgabe bis **Freitag**, 27.06.2014, 10:00 Uhr (Kästen siehe Beschilderungen)

Aufgabe 1: Mehr über die Inversion am Kreis (6 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Mithilfe der Identifikation von $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ kann die Inversion am Einheitskreis geschrieben werden als $z \mapsto 1/\overline{z}$. Wie kann analog dazu die Inversion an einem beliebigen Kreis geschrieben werden (mit Begründung)?

(b) Im allgemeinen werden drei Punkte A, B, C durch die Inversion I_K an einem Kreis auf drei Punkte D, E, F abgebildet, so dass das Dreieck ABC *nicht* ähnlich ist zum Dreieck DEF.

(c) Im allgemeinen bildet I_K einen Kreis um einen Punkt P *nicht* auf einen Kreis um $I_K(P)$ ab.

Aufgabe 2: Kreiskonstruktionen I (6 Punkte)

Geben Sie eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal an, die zu zwei gegebenen Punkten A, B und einer Geraden g, so dass A und B auf der selben Seite von g liegen, einen Kreis K konstruiert, der A und B enthält und tangential an g ist.
Hinweis: Sei P der Schnittpunkt zwischen AB und g. Offensichtlich sind Sie fertig, sobald der Berührpunkt Z auf g festliegt. Welche Beziehung muss nach einer früheren Übungsaufgabe gelten zwischen $\overline{PZ}$, $\overline{PA}$ und $\overline{PB}$? Konstruieren Sie eine zu $\overline{PZ}$ kongruente Strecke, indem Sie diese Beziehung noch einmal auf einen beliebigen anderen Kreis anwenden, der A, B enthält!

Aufgabe 3: Kreiskonstruktionen II (6 Punkte)

Sei K ein Kreis in der euklidischen Ebene und A, B zwei Punkte im Innern K. Geben Sie eine Zirkel-Lineal-Konstruktion an, die einen Kreis L konstruiert, der A, B enthält und tangential an K ist.
Hinweis: Versuchen Sie, eine Kreisinversion zu benutzen, um das Problem auf das in Aufgabe 2 betrachtete zurückzuführen. Kann man eine ähnliche Konstruktion durchführen, wenn beide Punkte im Äußeren von K liegen?

Aufgabe 4: Eine andere Darstellung der Inversion am Kreis (6 Punkte)

Sei ein Kreis K um $P := (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ mit Radius $2r$ gegeben. Wir definieren $S := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x - (r, p_1, p_2)\| = r\}$, die Oberflche einer Kugel (auch Sphre genannt). Diese Sphre berührt $\{0\} \times \mathbb{R}^2$ gerade in $(0, p_1, p_2)$. Wir bezeichnen den Punkt $(2r, p_1, p_2)$ mit N (wie Nordpol). Sodann definieren wir die **stereographische Projektion an** p **mit Radius** $2r$, eine Abbildung $S_{P,r}$ von $S \setminus N$ nach $\{0\} \times \mathbb{R}^2$ wie folgt: Für einen Punkt X auf $S \setminus N$ sei $S_{P,r}(X)$ der Schnittpunkt von der Geraden NX in $\mathbb{R}^3$ mit $\{0\} \times \mathbb{R}^2$. Weiterhin sei R die Spiegelung in $\mathbb{R}^3$ an der Ebene $\{r\} \times \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie: Die Inversion an K ist (modulo der natürlichen Identifikation von $\mathbb{R}^2$ mit $\{0\} \times \mathbb{R}^2$) gegeben durch $I_K(Q) = S_{P,r} \circ R \circ S_{P,r}^{-1}(Q)$ für alle $Q \neq P$.