Übungen zu Geometrie (LGy)

Universität Regensburg, Sommersemester 2014
Dr. Raphael Zentner, Dr. Olaf Müller

Übungsblatt 12

Abgabe bis **Freitag**, 04.07.2014, 10:00 Uhr (Kästen siehe Beschilderungen)

Aufgabe 1: Das Poincaré-Modell ist archimedisch (6 Punkte)

Wir wollen zeigen, dass das Poincaré-Modell dem archimedischen Axiom genügt: Für jede Strecke ${}^{P}\overline{AC}$ und $B \in {}^{P}\overline{AC}$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass n-maliges Abtragen der Strecke ${}^{P}\overline{AB}$ von A ausgehend auf dem Strahl ${}^{P}\overrightarrow{AC}$ über den Punkt B hinausführt. Hier bezeichnet ${}^{P}\overline{AC}$ die Strecke von A nach C auf einer P-Geraden. Desweiteren identifizieren wir die Poincaré-Scheibe mit der offenen Einheitsscheibe in $\mathbb{R}^2$.

(a) Zeigen Sie die obige Eigenschaft für die Punkte $A = (0,0)$, $C = (0,c)$ mit $c > 0$ und $B = (0,b)$ mit $b > 0$. **Hinweis:** Finden Sie per Induktion eine Formel für $B_n = (0, b_n)$, wobei dieser Punkt durch n-maliges Abtragen entstanden sein soll, d.h. $B_1 = B$.

(b) Ausgehend vom Aufgabenteil (a), beweisen Sie den allgemeinen Fall mit möglichst wenig Zusatzaufwand.

Aufgabe 2: Flexible Winkelsumme im Poincaré-Modell (6 Punkte)

Zeigen Sie: Für jede Zahl $a \in (0, \pi)$ gibt es ein hyperbolisches Dreieck, dessen Innenwinkelsumme genau a beträgt. **Hinweis:** Zeigen Sie, dass 'kleine' Dreiecke 'fast Winkelsumme π haben' und dass 'große' Dreiecke eine beliebig kleine Innenwinkelsumme haben.

Aufgabe 3: Hyperbolischer Abstand im Poincaré-Modell (4 Punkte)

In der Vorlesung wurden P-Streckenkongruenzen über das Doppelverhältnis eingeführt.

(a) Zeigen Sie: Für zwei Punkte A, B der Poincaré-Scheibe nimmt das Doppelverhältnis (AB, PQ) (wobei P das 'Ende' der P-Geraden auf der Seite von A ist, die B nicht enthält und entsprechend für Q) Werte zwischen 0 und 1 an.

(b) Definiert man den 'hyperbolischen Abstand' von zwei Punkten A, B im Poincaré-Modell über

$$d(A,B) := \log((AB, PQ)) \ ,$$

so ist dieser Abstandsbegriff additiv bezüglich Streckenaddition.

Aufgabe 4: Maximale hyperbolische Inkreise (8 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass im Poincaré-Modell die P-Kreise euklidische Kreise sind, die ganz in der Scheibe liegen. **Hinweis:** Zeigen Sie dies zunächst für Kreise mit Mittelpunkt O, dem Mittelpunkt der Kreisscheibe!

(b) Zeigen Sie, dass die Radien von Inkreisen (definiert als reelle Zahlen unter Verwendung des Abstandsbegriffs aus der vorherigen Aufgabe) hyperbolischer Dreiecke eine beschränkte Menge bilden, und berechnen Sie ihr Supremum.