# Übungen zu Geometrie (LGy)

Universität Regensburg, Sommersemester 2014
Dr. Raphael Zentner, Dr. Olaf Müller

## Übungsblatt 13

Dieses Übungsblatt wird nicht mehr zur Abgabe vorgesehen. Es dient der Wiederholung des Stoffes aus der Vorlesung und den Übungen, wobei noch ein Schwerpunkt zugunsten des zuletzt behandelten Stoffes liegt. Der Umfang und Schwierigkeitsgrad der Aufgaben variiert deutlich.

### Aufgabe 1: Sehnen von Winkeln

Sei $E$ eine Ebene, in der die Anordnungs- und Zwischenaxiome (einschließlich dem Pasch-Axiom) gelten. Gegeben seien ein Winkel $\sphericalangle(s,t)$ sowie zwei Punkte $P \in s$ und $Q \in t$. Man zeige, dass jeder Strahl im Inneren des Winkels, der vom Scheitelpunkt des Winkels ausgeht, die Strecke $\overline{PQ}$ schneidet.

### Aufgabe 2: Parallelen

Sei $E$ eine Hilbert-Ebene und $g$ eine Gerade in $E$.

(a) Sei $A$ ein beliebiger Punkt der Ebene. Wiederholen Sie die Definition des Lots von $A$ auf $g$, und zeigen Sie dessen Eindeutigkeit.

(b) Seien $P, Q$ zwei Punkte, die auf der gleichen Seite von $g$ liegen, und so dass für die Lotfußpunkte $L(P,g)$ und $L(Q,g)$ gilt, dass die Strecken $\overline{PL(P,g)}$ und $\overline{QL(Q,g)}$ kongruent zueinander sind. Zeigen Sie, dass die Gerade $PQ$ parallel zu $g$ ist.

### Aufgabe 3: Indreieck mit kleinstem Umfang

Sei $E$ eine archimedische Hilbertebene mit Parallelenaxiom. Sei $ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck in $E$ (d.h. sämtliche Innenwinkel seien kleiner als rechte Winkel). Sei stets der **Umfang** $U(X,Y,Z)$ eines Dreieckes $XYZ$ definiert durch
$U(X,Y,Z) := \overline{XY} + \overline{YZ} + \overline{ZX}$,
also die Summe der Seitenlängen. Wir wollen nun ein Dreieck $(P,Q,R)$ konstruieren, das $P \in \overline{BC}, Q \in \overline{CA}, R \in \overline{AB}$ (*) erfüllt und minimalen Umfang hat unter allen derartigen Dreiecken. Zeigen Sie dazu:

(a) Für einen festen Punkt $X \in \overline{B,C}$ seien $Y := i_{AC}(X)$, $Z := i_{AB}(X)$. Dann gilt für $M \in \overline{CA}$ und $N \in \overline{BA}$: $U(X,M,N) \geq \overline{YZ}$. Zeigen Sie auch, dass es zwei Punkte $M_0 \in \overline{CA}$ und $N_0 \in \overline{BA}$ gibt mit $U(X,M_0,N_0) \cong \overline{YZ}$.

(b) Nun soll $P \in \overline{BC}$ gefunden werden mit $\overline{YP}$ minimal. Zeigen Sie, dass der Winkel $\sphericalangle(Y, A, Z)$ nicht von der Wahl von $X \in \overline{BC}$ abhängt, und dass $\overline{A, Y} \cong \overline{AX} = \overline{AZ}$.

(c) Wie müssen nun also die Punkte $P, Q, R$ gewählt werden, damit $U(P, Q, R)$ minimal sind unter allen $P, Q, R$ mit (*)?

**Aufgabe 4: Das Lot ist die kürzeste Verbindung**

Seien $P, Q \in E$ und $g$ eine Gerade mit $P \in g$. Sei $R$ der Fußpunkt des Lotes von $Q$ auf $g$. Zeigen Sie, dass $\overline{QR} \leq \overline{QP}$ und dass $\overline{QR} \cong \overline{QP} \Rightarrow P = R$.

**Aufgabe 5: Flächeninhalte in der euklidischen Ebene**

(a) Gegeben sei ein Quadrat. Man zeige, dass die beiden diagonalen Strecken kongruent sind. Man zeige, dass das Quadrat über einer Diagonalen doppelten Flächeninhalt hat.

(b) Welchen Flächeninhalt hat ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge 1?

(c) Welchen Flächeninhalt hat ein regelmäßiges Pentagon, dessen Eckpunkte auf einem Kreis von Radius 1 liegen?

**Aufgabe 6: Goldener Schnitt**

Gegeben eine Strecke $\overline{AB}$, konstruieren Sie einen Punkt $C \in \overline{AB}$, so dass das Rechteck mit Kantenlängen $\overline{CB}$ und $\overline{AB}$ den gleichen Flächeninhalt hat wie das Quadrat über $\overline{AC}$. Was hat dieser Punkt $C$ mit dem 'goldenen Schnitt' zu tun? **Hinweis:** Diese Konstruktion ist bereits in der Vorlesung aufgetaucht.

**Aufgabe 7: Apollonische Probleme**

Recherchieren Sie ein apollonisches Problem, das noch nicht in der Vorlesung behandelt wurde, und lösen Sie dieses per Konstruktion mit Zirkel und Lineal. Beweisen Sie Ihre Schritte.

**Aufgabe 8: Regelmäßiges Pentagon**

Wiederholen Sie die Konstruktion samt Beweis des regelmäßigen Pentagons. Verstehen Sie jeden Schritt der Konstruktion.

**Aufgabe 9: Inversion am Kreis**

Gegeben seien zwei Kreise $K$ und $L$ von unterschiedlichem Radius. Man konstruiere einen dritten Kreis $M$, so dass die Inversion an $M$ den Kreis $K$ auf $L$ abbildet.

**Aufgabe 10: Fixpunkte von Bewegungen**

Die Fixpunktmenge einer Bewegung $\psi$ einer Hilbert-Ebene ist definiert als

$$\mathrm{Fix}(\psi) = \{P \in E \mid \psi(P) = P\}\,.$$

(a) Sind $P, Q \in \mathrm{Fix}(\psi)$, so liegt auch die Gerade $PQ$ in der Fixpunktmenge.

(b) Sind $\rho, \phi$ zwei Bewegungen, so gilt:

$$\mathrm{Fix}(\rho \circ \phi \circ \rho^{-1}) = \rho(\mathrm{Fix}(\phi))\,.$$

**Aufgabe 11: Translationen**

Sei $E$ eine Hilbertebene, in der das Parallelenaxiom gilt. Eine Bewegung $i$ heißt **Translation**, wenn $i(g)||g$ für alle Geraden $g$ und entweder $i = \mathrm{Id}$ oder $\mathrm{Fix}(i) = \emptyset$. Sei $T$ die Menge aller Translationen. Zeigen Sie:

(a) Für $t \in T \setminus \{\mathrm{Id}\}$ und $P, Q \in E$ gilt $Pt(P)||Qt(Q)$. **Hinweis:** Zeigen Sie, dass ein etwaiger Schnittpunkt Fixpunkt wäre!

(b) Zu zwei Punkten $P, Q \in E$ gibt es **höchstens** eine Translation $t$ mit $t(P) = Q$.

(c) Für zwei parallele Geraden $g||h$ ist $i_g \circ i_h$ eine Translation.

(d) Umgekehrt ist jede Translation $t$ von der Form $i_g \circ i_h$ für zwei parallele Geraden $g, h$, und zu je zwei Punkten $P, Q \in E$ gibt es **genau** eine Translation $t$ mit $t(P) = Q$.

(e) $T$ ist eine abelsche Untergruppe der Bewegungsgruppe.

**Aufgabe 12: Punktspiegelung und Involutionen**

Sei $E$ eine Hilbertebene, seien $g, g'$ Geraden mit $g \perp g'$, $g \cap g' = \{P\}$. Die Bewegung $i_P := i_g \circ i_{g'} = i_{g'} \circ i_g$, die ja eine Drehung um $P$ ist, heißt **Punktspiegelung an** $P$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $Q \neq P$ ist $i_P(Q)$ gerade der Punkt, den man durch Abtragen der Strecke $\overline{PQ}$ von $P$ aus am Strahl an $P$, der $Q$ nicht enthält. (Insbesondere ist es für die Definition von $i_P$ egal, welches Geradenpaar mit $g \perp g'$, $g \cap g' = \{P\}$ man wählt!)

(b) Jedes $i \in I \setminus \{\mathrm{Id}\}$ mit $i^2 = \mathrm{Id}$ ist Spiegelung an einer Geraden oder Punktspiegelung. **Hinweis:** Untersuchen Sie für verschiedene Punkte $X$ den Mittelpunkt der Strecke $\overline{Xi(X)}$.

**Aufgabe 13: Hyperbolische Dreiecke**

Geben Sie ein Dreieck im Poincaré-Modell der hyperbolischen Geometrie an und berechnen Sie analytisch dessen Innenwinkelsumme. Hinweis: Sie werden einen Innenwinkel kleiner als zwei rechte Winkel erhalten.

**Aufgabe 14: Kurzfragen**

(a) Gibt es Hilbertebenen, die das archimedische Axiom erfüllen, in denen das Parallelenaxiom nicht gilt?

(b) Gibt es Hilbertebenen, die Dreiecke enthalten, die keinen Umkreis haben?

(c) Gibt es Hilbertebenen, die Dreiecke enthalten, die keinen Inkreis haben?

(d) Wieviele Bewegungen gibt es in einer Hilbertebene, die einen gegebenen Strahl $s$ auf einen gegebenen Strahl $t$ abbilden?

**Aufgabe 15: Parkettierung**

Was sehen Sie auf diesem Bild, ausgedrückt über Ihr Wissen über das Poincaré-Modell der hyperbolischen Geometrie? Wofür gibt es kein Analogon in der euklidischen Ebene? (Das Dreieck in der Mitte ist gleichseitig und Kreise, die den Eindruck haben, senkrecht auf dem Rand der Scheibe zu stehen, tun dies auch)