Übungen zu Geometrie (LGy)

Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg, Sommersemester 2014

Dr. Raphael Zentner, Dr. Olaf Müller

Übungsblatt 5

Abgabe bis Freitag, 16.05.2014, 10:00 Uhr (Kästen siehe Beschilderungen)

Aufgabe 1: (Berührpunkte tangentialer Kreise und Zentren. 6 Punkte)

Seien K_1, K_2 Kreise in einer Hilbert-Ebene. Zeigen Sie:

(a) Wenn K_1, K_2 tangential zueinander sind (d.h. genau einen gemeinsamen Punkt haben), dann liegen ihre Mittelpunkte und der Berührpunkt auf einer Geraden.

(b) Wenn A ein gemeinsamer Punkt von K_1 und K_2 ist, und die beiden Mittelpunkte sowie A liegen auf einer Geraden, dann sind K_1 und K_2 tangential zueinander.

Aufgabe 2: (Kreise. 4 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir Eigenschaften von Kreisen in Hilbert-Ebenen.

(a) Zeigen Sie: Das Innere eines Kreises ist konvex, d.h. liegen P und Q im Inneren eines Kreises, so liegt auch die Strecke $\overline{PQ}$ ganz im Inneren des Kreises. Zeigen Sie auch, dass für zwei beliebige Punkte A und B auf einem Kreis die Punkte zwischen A und B im Inneren des Kreises liegen. (Die Strecke $\overline{AB}$ heißt auch eine Sehne des Kreises.)

(b) Zeigen Sie die *Symmetrie des Kreisaxioms*, d.h. zeigen Sie, dass aus dem Kreisaxiom und den anderen Axiomen die Aussage folgt, die man erhält, wenn man im Kreisaxiom die Rolle der Kreise vertauscht.

Aufgabe 3: (Relative Lage von tangentialen Kreisen. 4 Punkte)

Zeigen Sie: Falls zwei Kreise K_1 und K_2 in einer Hilbert-Ebene tangential zueinander sind und den Punkt A gemeinsam haben, so liegen entweder sämtliche Punkte des einen Kreises, mit Ausnahme von A, im Inneren oder im Äußeren des anderen Kreises.

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle, wo die beiden Kreise auf der gleichen Seite oder auf gegenüberliegenden Seiten der Tangente liegen. Im ersten Fall können Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 1 verwenden, die auch Sätze in der Vorlesung waren. Gegeben einen Punkt auf dem Kreis mit dem kleineren Radius, betrachten Sie geeignete Dreiecke und Größenvergleiche von Strecken, die Sie möglicherweise durch Größenvergleiche von Winkeln erhalten.

Aufgabe 4: (Winkelsummen. 10 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Wenn das Euklidische Axiom in einer Hilbertebene erfüllt ist, so gilt der 'Stufenwinkelsatz': Werden zwei parallele Geraden von einer dritten geschnitten, so ist ein Schnittwinkel kongruent zu seinem Stufenwinkel (und Wechselwinkel). Geben Sie auf Grundlage der Axiome der Inzidenz, Anordnung und Kongruenz (und insbesondere der Möglichkeit von Winkelantragung) eine Definition der Summe von Winkeln. Zeigen Sie damit, dass die Winkelsumme eines beliebigen Dreiecks in einer Hilbertebene mit Euklidischem Axiom gleich dem Doppelten eines rechten Winkels ist (erklären Sie noch einmal genau, was das heißen soll!).

(b) Es gelte das Euklidische Axiom in einer Hilbertebene. Sei ein Kreis K mit Mittelpunkt M gegeben. Sei g eine Gerade, die den Mittelpunkt M nicht enthält und den Kreis in zwei Punkten A und B schneidet. Sei C ein beliebiger weiterer Punkt auf K, der auf der gleichen Seite von g wie M liegen soll. Zeigen Sie: Der Winkel $\sphericalangle AMB$ ist kongruent zum Doppelten des Winkels $\sphericalangle ABC$. Welchen bekannten Satz erhalten Sie stattdessen, wenn die Gerade g den Mittelpunkt M enthält?