Übungen zu Geometrie (LGy)

Universität Regensburg, Sommersemester 2014
Dr. Raphael Zentner, Dr. Olaf Müller

Übungsblatt 8

Abgabe bis 06.06.2014, 10:00 Uhr (Kästen siehe Beschilderungen)

Sei stets eine Hilbert-Ebene gegeben, die das Euklidsche Axiom erfüllt.

Aufgabe 1: Ein Strahlensatz (6 Punkte)

Zeigen Sie: Für zwei Strahlen s, t an einem Punkt P und zwei Punkte A, B auf s sowie zwei Punkte C, D auf t gilt: Falls $\overline{PA}/\overline{PB} = \overline{PC}/\overline{PD}$, so ist AC parallel zu BD. Formulieren Sie eine Umkehrung dieses Satzes und beweisen Sie sie. **Hinweis** für die Umkehrung: Bestimmen Sie erst mit Hilfe des Strahlensatzes einen Punkt auf dem zweiten Strahl, so dass die beiden Geraden parallel sind, und benutzen Sie dann Eindeutigkeiten!

Aufgabe 2: Ähnlichkeitssätze (6 Punkte)

1. Zeigen Sie: Sind zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gegeben mit $\overline{AB}/\overline{A'B'} = \overline{BC}/\overline{B'C'} = \overline{AC}/\overline{A'C'}$, so ist ABC ähnlich zu $A'B'C'$.
2. Zeigen Sie: Sind zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gegeben mit $\overline{AB}/\overline{A'B'} = \overline{BC}/\overline{B'C'}$ und $\measuredangle ABC$ kongruent zu $\measuredangle A'B'C'$, so ist ABC ähnlich zu $A'B'C'$.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Gegeben sei ein Kreis K, ein Punkt P aus dem Äußeren von K, t ein an K tangentialer Strahl an P mit Kontaktpunkt C. Sei s ein Strahl an P, der K in zwei verschiedenen Punkten Q, R schneidet, mit $Q \in \overline{PR}$. Zeigen Sie, dass dann gilt $\overline{PQ} \cdot \overline{PR} = \overline{PC} \cdot \overline{PC}$.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Zeigen Sie die Umkehrung der letzten Aussage: Gegeben sei ein Kreis K, ein Punkt P aus dem Äußeren von K, t ein Strahl an p, der K in einem Punkt C schneidet. Sei s ein Strahl an P, der K in zwei verschiedenen Punkten Q, R schneidet, mit $Q \in \overline{PR}$. Wenn dann gilt $\overline{PQ} \cdot \overline{PR} = \overline{PC} \cdot \overline{PC}$, dann ist t tangential. **Hinweis:** Verbinden Sie P mit dem Mittelpunkt M des Kreises, konstruieren Sie auf der anderen Seite von PM bezüglich t einen tangentialen Strahl und verwenden Sie einen geeigneten Kongruenzsatz.

Aufgabe 5: Zusammenhängende Außengebiete (6 Punkte)

Sei das Euklidische Axiom nicht unbedingt erfüllt, aber das Archimedische Axiom. Zeigen Sie:

1. Für ein Dreieck ABC und zwei Punkte P, Q in seinem Äußeren gibt es einen Streckenzug, der ganz im Äußeren von ABC liegt und P mit Q verbindet.
2. Für einen Kreis K und zwei Punkte P, Q in seinem Äußeren gibt es einen Streckenzug, der ganz im Äußeren von K liegt und P mit Q verbindet.

Für eine dieser Aussagen brauchen Sie das Archimedische Axiom nicht. Für welche?

Aufgabe 6: Zerlegungsgleichheit von Parallelogrammen (6 Punkte)

Sei das Euklidsche und das Archimedische Axiom erfüllt. Zeigen Sie, wie in der Vorlesung schon skizziert: Je zwei Parallelogramme $ABCD$ und $A'B'C'D'$, so dass $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ kongruent sind, und deren Höhen auf AB und $A'B'$ zueinander kongruent sind, sind zerlegungsgleich.