Übungen zu Geometrie (LGy)

Universität Regensburg, Sommersemester 2014

Dr. Raphael Zentner, Dr. Olaf Müller

Übungsblatt 9

Abgabe bis 13.06.2014, 10:00 Uhr (Kästen siehe Beschilderungen)

Aufgabe 1: $\mathbb{R}^2$ ist Euklidisch (10 Punkte)

Direkt nach der Definition des Begriffs 'Euklidische Ebene' wurde in der Vorlesung erwähnt, dass $\mathbb{R}^2$ mit der üblichen Geradenmenge G^{aff} gegeben durch $PQ := \{aP + (1-a)Q | a \in \mathbb{R}\}$, der üblichen Zwischenrelation $\overline{PQ} := \{aP + (1-a)Q | a \in [0,1]\}$, den üblichen Kongruenzen gegeben durch die Isometrien des $\mathbb{R}^2$ (also allen affinen Abbildungen A mit $l(A(P) - A(Q)) = l(P - Q)$ für $P, Q \in \mathbb{R}^2$, wobei $l((a,b)) := \sqrt{a^2 + b^2}$) alle Axiome einer Euklidischen Ebene erfüllt. Zeigen Sie dies!

Hinweise:

- Zum Axiom von Pasch: Stellen Sie die Gerade g, die das Dreieck schneidet, mit Hilfe einer affinen Gleichung dar, also $g = A_g^{-1}$ für ein affines Funktional A_g. Dann definieren Sie, für zwei Punkte P, Q, die Funktion $F_{P,Q}^g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $F_{P,Q}^g(r) = A_g(P + r(Q - P))$. Wählen Sie als P, Q geeignete Punkte des Dreiecks und untersuchen Sie die Monotonieeigenschaften von $F_{P,Q}^g$.
- Zur Vollständigkeit: Sei Z ein zusätzlicher Punkt. Zeigen Sie, dass Z auf keiner Gerade liegen kann, die zwei Punkte aus $\mathbb{R}^2$ enthält, indem Sie die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ verwenden. Leiten Sie dann einen Widerspruch zum Axiom von Pasch her.

Aufgabe 2: Umdreiecke (10 Punkte)

1. Zeigen Sie: Falls das Parallelenaxiom erfüllt ist, so gilt: Gegeben ein Kreis K mit Mittelpunkt M und drei Punkte A, B, C auf K, die nicht enthalten sind in der Vereinigung von einer Geraden durch M und einer Halbebene an ihr, dann schneiden sich die Tangenten an A, B, C paarweise unnd bilden ein sogenanntes Umdreieck zu K, also ein Dreieck, das K als Inkreis hat.
2. Geben Sie ein Gegenbeispiel für den Fall, dass das Parallelenaxiom nicht erfüllt ist: Finden Sie einen Kreis K, so dass es überhaupt kein Dreieck gibt, dessen Inneres K enthält.

Aufgabe 3: Spezielle Kreisbögen (4 Punkte)

Sei eine Hilbertebene mit Parallelenaxiom gegeben. Sei K ein Kreis und P ein Punkt auf dem Kreis, Q ein Punkt im Innern, so dass der Mittelpunkt M des Kreises nicht auf PQ liege. Zeigen Sie: Es gibt genau einen Kreis L, der K in P senkrecht schneidet (definieren Sie genau, was das heißt!) und Q enthält. Weiterhin schneidet L den Kreis K noch in einem zweiten Punkt ebenfalls senkrecht.