③ Die in der VL verwendete Version des Axioms von Pasch stellt bereits sicher, dass zwei verschiedene Seiten geschnitten werden.

Es ist also nur zu zeigen, dass lediglich zwei und nicht alle drei Seiten geschnitten werden!

Seien also $A, B, C \in h$, und g schneide $\overline{AB}^\circ, \overline{BC}^\circ$ oder $\overline{AC}^\circ$ (hier: setze $\overline{PQ}^\circ := \overline{PQ} \setminus \{P\} \setminus \{Q\}$). Ohne Einschränkung schneide g $\overline{AB}^\circ$ in einem Punkt Z.

Dann gilt also für die Äquivalenzrelation $\sim_Z$ auf AB (die man durch Einschränkung der ÄR $\sim_{ZY}$ auf AB erhält): $A \not\sim_Z B$.

Falls nun $Z \in \overline{AC}^\circ \Rightarrow A \not\sim_Z C \underset{ÄR}{\Rightarrow} B \sim_Z C \Rightarrow Z \notin \overline{BC}^\circ$

und umgekehrt: $Z \in \overline{BC}^\circ \Rightarrow B \not\sim_Z C \underset{ÄR}{\Rightarrow} A \sim_Z C \Rightarrow Z \notin \overline{AC}^\circ$. ■

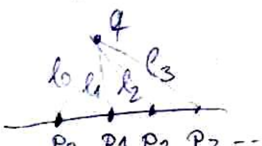
④ (i) Seien $B \in \overline{AC}^\circ$. Dann gilt

$Q \in \overline{AB}^\circ \underset{A3}{\Rightarrow} B \notin \overline{QA}^\circ \underset{Def.}{\Rightarrow} Q \sim_B A \underset{\sim_B\, ÄR}{\Rightarrow} Q \not\sim_B C$ (da $A \not\sim_B C$)

$\Rightarrow B \in \overline{QC}^\circ \underset{A3}{\Rightarrow} Q \notin \overline{BC}^\circ \Rightarrow B \sim_Q C$ ■

Da aber $A \not\sim_Q B$, ~~folgt~~ $A \not\sim_Q C$ ~~und~~ $Q \in \overline{AC}^\circ$

(ii) Induktiv wählt man p_{n+1} als Verlängerung von $p_0 p_n$ im Sinne von A2. Durch Induktion unter Verwendung von (i) sehen wir: $p_i \in \overline{p_0 p_n}^\circ \ \forall n > i$, daher sind die p_i paarweise ungleich. ■



(iii) Wähle $q \in E \setminus p_0 p_1$ und betrachte $l_i := p q_i$:

Aus V_1 folgt: $l_i = l_j \Rightarrow l_i = p_i p_j$ (da $q \in l_i, l_j$) ↯ zu $q \notin p_i p_j$

Also sind die l_i alle verschieden ■