

# Einführung in die Knotentheorie

## I. Knoten, Isotopien & Äquivalenzen

1. Knoten,  
 $X, Y$  Hausdorff - Räume.

Eine Abbildung

$$f: X \rightarrow Y \text{ heißt}$$

Einbettung, wenn  $f$  einen  
Homöomorphismus auf sein  
Bild liefert;  $f: X \xrightarrow{\cong} f(X)$ .

Def: Ein Knoten  $k$  ist eine  
Einbettung  $k: S^1 \rightarrow S^3$ .

(Wir unterscheiden oft nicht zwischen  
einer Einbettung und ihrem Bild).

~~Es~~  
Oft fassen wir  $k$  auch auf als  
eine Einbettung  $k: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  
solange aus Bshg. ersichtlich sein.

Wichtig In der Knotentheorie untersucht  
man aber nicht alle solche Ein-  
bettungen, sondern eher gewisse  
Klassen von Knoten. Wichtige Frage-  
stellung: Kann man  $k$  „entknoten“, d.h.  
 $k$  zu  $3$  zerlegen?

<sup>1.2</sup>  
Def: Zwei Einbettungen  $f_0, f_1: X \rightarrow Y$   
sind isotop, wenn es eine  
Einbettung

$$F: X \times I \rightarrow Y \times I$$

gibt, so dass

$$F(x, t) = (f(x, t), t)$$

"niveau  
"halten"

für alle  $(x, t)$  ist, und so dass

$$f_0(x) = F(x, 0)$$

$$f_1(x) = F(x, 1)$$

$\forall x \in X$  gilt.

Bem: Isotopien definieren Äquivalenz-  
relationen. Noch keine guten,  
um Knoten zu unterscheiden:

Skizze:





for  $f_1: X \rightarrow Y$  -8

Definition: <sup>1.3.</sup> Zwei Einbettungen heißen umgebungs-isotop, wenn es eine Isotopie

$$H: Y \times I \rightarrow Y \times I \quad h_t(y)$$

gibt, s.d.  $H(y, t) = (h(t, y), t)$   
 $\downarrow$   
 $t(t, y)$ ,

und so dass  $f_1 = h_1 \circ f_0$   
 und  $h_0 = \text{id}_Y$ .

Beob.:  $f_0, f_1$  umgebungs-isotop  
 $\Rightarrow f_0, f_1$  isotop.

Die Umkehrung gilt i. A. nicht

Bei Umgebungs-Isotopien „bewegt sich ~~die~~ die Umgebung mit“ beim Überführen der einen Einbettung in die andere.

Klammer auf: Man kann isotop, umgebungs-isotop auch für Mannigfaltigkeiten  $X, Y$  und diff. Abb. Einbettungen <sup>als  $\tau$</sup>  mit surjektiver Ableitung definieren. Dann gilt auch die Umkehrung, wenn  $X$  kompakt ist. Klammer zu.

Beob: Zwei umgebungs-isotope  
Knoten  $k_0, k_1$  haben homöomorphe  
Komplemente:

$$h: S^3 \times \bar{I} \rightarrow S^3$$

mit  $k_1 = h_1 \circ k_0$ ,  $h_0 = \text{id}$   
eine Umgebungs-Isotopie.

Dann ist

$$h_1|_{S^3 \setminus k_0(S^1)}: S^3 \setminus k_0(S^1) \rightarrow S^3 \setminus k_1(S^1)$$

ein Homöomorphismus.

Also: Sind Knotenkomplemente

$S^3 \setminus k_0$  und  $S^3 \setminus k_1$  nicht  
homöomorph, so sind  $k_0, k_1$  nicht  
umgebungs-isotop.

1.4.  
Def: Zwei Knoten  $k_0, k_1$  ~~heißen~~  
~~sind~~ heißen äquivalent wenn  
sie zueinander <sup>umgebungs</sup> ~~bewegungs~~-isotop  
sind.

Top. Einbettungen können aber „wild“ sein.

-5-

Bsp:

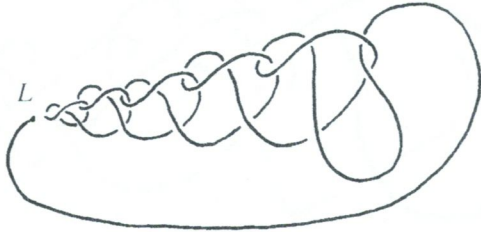


Figure 1.2

$=: k$

[Fox - Artin, 1948] haben gezeigt:

- (1)  $S^3, k$  ist nicht homöomorph zu  $S^3$ . fru. Knoten  $\circ$
- (2) Aber: Man kann von rechts „entknoten“
- (3)  $\alpha \subseteq S^1$  ein <sup>bel.</sup> Teilsegment, so dass  $k(\alpha) \ni L$ .  
Dann ist  $S^3, k(\alpha)$  nicht einfach zusammenhängend

Interpret:  $k$  ist „wild“ an der Stelle  $L$ .



1.5  
Def:

Ein Kasten  $K$  heißt zahn, falls es umgebungsisotop zu einem <sup>einfachen</sup> geschlossenen Polygonzug in  $\mathbb{R}^3$  bzw.  $S^3$  ist.

Beob: Eigenschaft (3) kann dann nicht auftreten.

Def:

Wir werden in dieser Vorlesung nur zähne Kasten untersuchen.

Diese Definition legt eine neue Äquivalenzklasse von Kästen nahe.

Die geeignete Rahmenkategorie ist die ~~Klass~~ "stückweise lineare" (p.l.)

Räume: Verklebungen (endliche vieler) Polyeder auf geeignete Weise...

Abbildungen: Stückweise linear  
~~fd.h. Erdsdarstellung~~

Wir begnügen uns mit einem naiven und intuitiven Verständnis in dieser Vorlesung.

1.6  
Definition: Zwei p.l. Einsetzungen<sup>-7-</sup>  
 $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  sind p.l. isotop,  
wenn es eine p.l. - Einleitung

$$F : X \times I \rightarrow Y \times I$$

gibt, mit  $F(t, x) = (f(t, x), t)$

und  $f_0 = f(0, -)$ ,  $f_1 = f(1, -)$

Entsprechend p.l. - umgebungs-isotop.

1.7 p.l. einf. geradl.  
Def. (Äquivalenz) (= Polygonzüge)  
Zwei p.l. Knoten heißen  
äquivalent, wenn sie umgebungs-  
isotop durch p.l. - Umgebungsisotopien  
sind.

Vorsicht: Für p.l. - Knoten gibt es  
nur zwei Äquivalenzen:

- p.l. - Äquivalenz
- (top.) - umgebungs-isotop.

1.8  
Satz (wahrsch. ohne Beweis): Diese  
definieren identische Äquiv. - Klassen

## 2. Kombinatorische Äquivalenz

-8-

2.1

Definition ( $\Delta$ -Bewegung)

Sei  $u$  ein gerades Teilstück eines p.l. Knotens  $k$  in  $\mathbb{R}^3$ , und  $D$  ein Dreieck in  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\partial D = u \cup v \cup w$$

Ist  $D \cap k = u$  (d.h. <sup>insb.</sup> das Dreieck wird von  $k$  nirgends „durchstochen“), so definiert

$$k' = (k \setminus u) \cup v \cup w$$

einen neuen p.l. Knoten.

Man sagt,  $k'$  entsteht aus  $k$  durch eine  $\Delta$ -Bewegung. Wir nennen  $\Delta^{-1}$  die inverse Bewegung.

2.102

Def (kombinatorische Äquivalenz)

Zwei p.l. Knoten heißen  $\Delta$ -äquivalent wenn sie aus endlich vielen  $\Delta, \Delta^{-1}$ -Bewegungen auseinander hervorgehen.



Proposition (Äquivalenzen von Äquivalenzen für p.l. Knoten)

Seien  $K_0, K_1$  zwei p.l. Knoten.

DfAsä: (Die folgenden Aussagen sind äquivalent)

(1.) Es gibt einen orientierungstypenhaltenden <sup>(p.l.)</sup> Homöomorphismus  $f: S^3 \rightarrow S^3$ , der  $K_0$  ~~in~~  $K_1$  überführt.

(2.)  $K_0$  und  $K_1$  sind p.l.-Umgebungsäquivalent

(3.)  $K_0$  und  $K_1$  sind kombinatorisch äquivalent ( $\Delta$ -äquivalent)

Evtl. später Beweisskizze.

### 3. Knoten - Projektionen

-10-

$E \subseteq \mathbb{R}^3$  eine Ebene

Wir stellen Knoten gewöhnlicher-  
weise 2-dim dar, d.h. mithilfe  
einer Projektion

$$p: \mathbb{R}^3 \rightarrow E$$

Sei  $k$  ein 1<sup>er</sup> Knoten

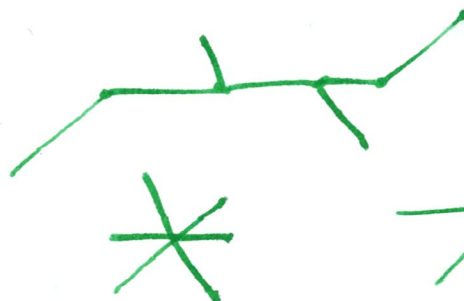
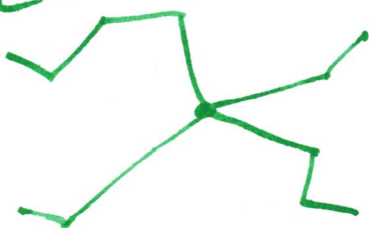
$P \in p(k) \subseteq E$  heißt Mehrfachpunkt,  
wenn  $|p^{-1}(P) \cap k| \geq 2$ .

3.1

Def. Eine Proj.  $p$  heißt reguläre  
Projektion eines Knotens  $k$ , wenn

- es nur endlich viele  
Mehrfachpunkte gibt,  
und diese alle 2-fach sind.
- Kein Vektor von  $k$  ~~ist~~  
wird auf einem Doppelpunkt  
abgebildet.

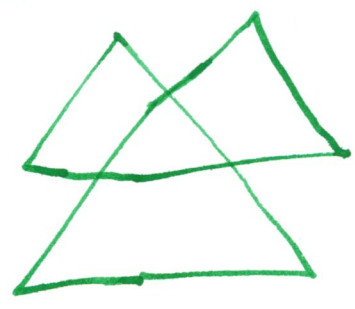
Es kann also nicht auftreten:



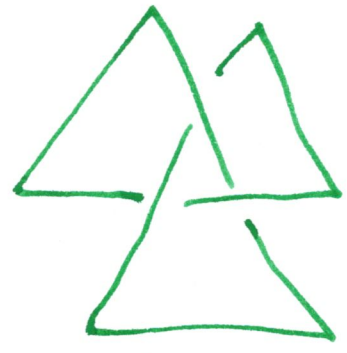
usw.

Man kann zeigen, dass „fast alle“  
 (in einem zu präzisierenden Sinn)  
 Projektionen eines gegebenen Knotens  
 regulär sind. Wir werden dies jedoch  
 nicht beweisen.

Ein Knoten ist nicht durch eine  
 reguläre Projektion bestimmt. Denken  
 wir jedoch bei jedem Doppelpunkt  
 an, welches das über- und  
 welches das unterkreuzende Linien-  
 Stück ist, so ist der Knoten (bis  
 auf p.l.-Äquivalenz) eindeutig  
 rekonstruierbar:



Knoten nicht  
bestimmt



Knoten  
eindeutig  
bestimmt

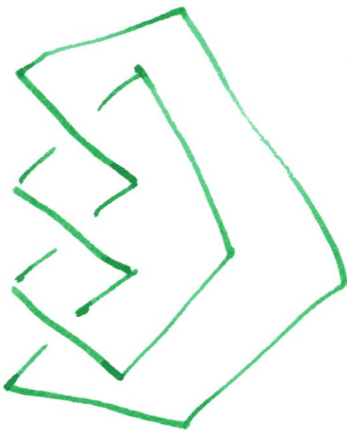
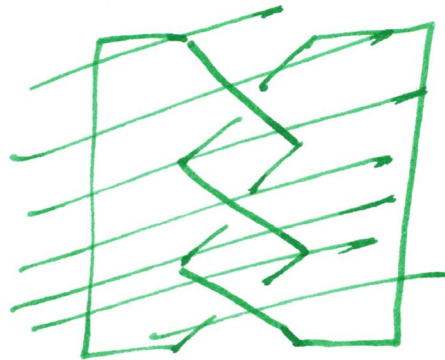
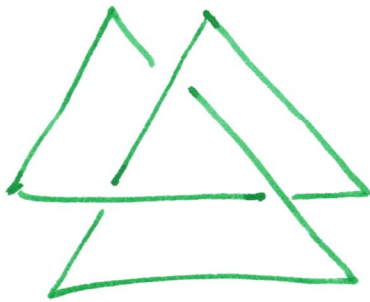
Def. 3.2:

Eine solche Projektion mit angedeuteten  
 über- und unterkreuzungen bezeichnen  
 wir als Knotendiagramm.



Wir betrachten zwei Knotendiagramme als gleich, wenn sie ~~aus~~ durch Isotopien der Ebene ineinander überführbar sind.  
~~(ohne dass sich etwas an den~~

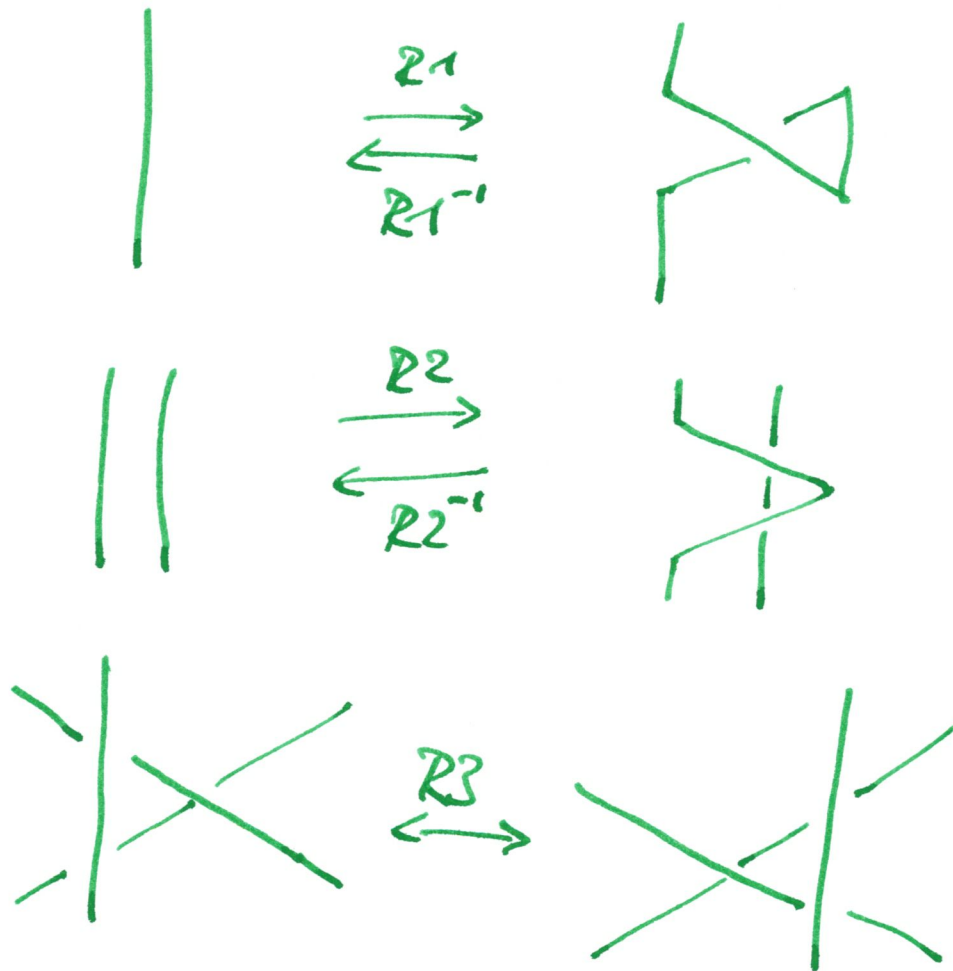
Beispiel :



↕ Isotopien  
der  
Ebene

### Def. 3.3 ( Reidemeister - Bewegungen ) -16-

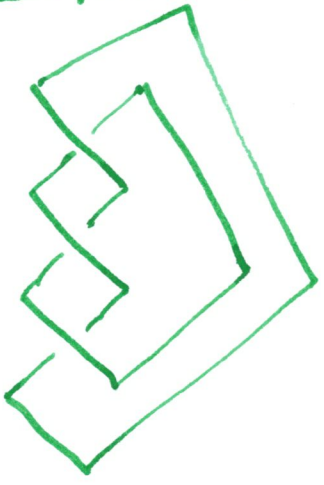
Transformationen von Knoten -  
Diagrammen der folgenden Art  
heißen Reidemeister - Bewegungen  
 $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_3$ :



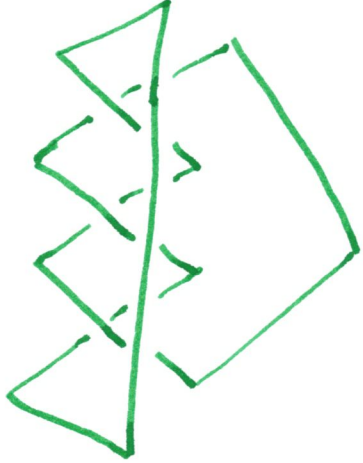
(Dargestellt sind jeweils nur die  
Beide eines Diagrammes, wo sich  
Veränderungen ergeben.)

Zwei Diagramme heißen Reidemeister -  
äquivalent, wenn sie ~~aus~~ durch  
viele Bewegungen der Art  $R_1, R_1^{-1}$ ,  
 $R_2, R_2^{-1}, R_3$  auseinander hervorgehen.

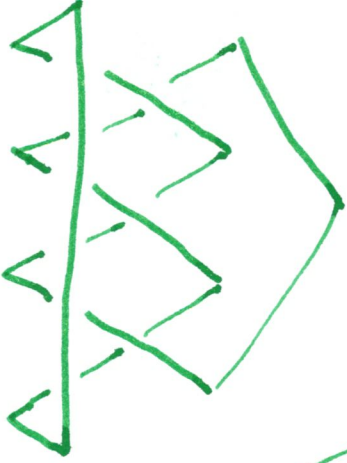
Beispiel:



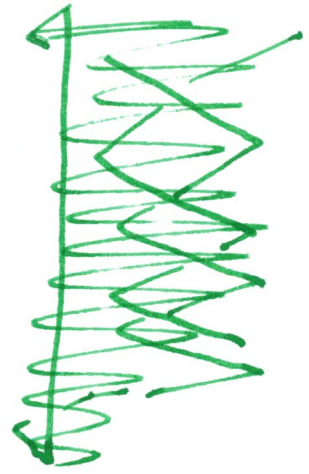
mehrere  
→  
R2



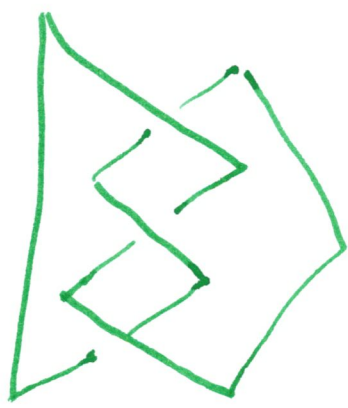
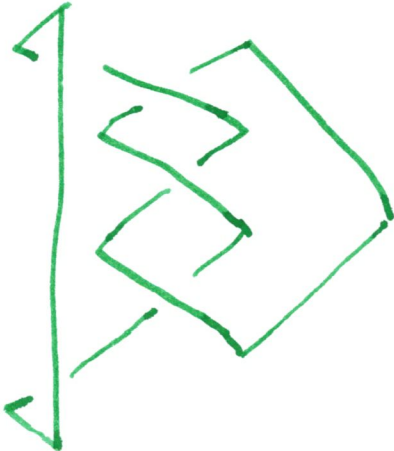
↙ mehrere  
R3



mehrere  
R2  
→



mehrere  
R1  
→



↓ Isotropie d. Ebene





Satz 3.4. (Reidemeister)

Zwei Knoten  $k, k'$  sind  $\Delta$ -äquivalent genau dann, wenn beliebige Diagramme  $D, D'$  von  $k$  bzw.  $k'$  sich durch Reidemeister-Bewegungen ineinander überführen lassen (d.h. wenn  $D$  und  $D'$  Reidemeister-äquivalent sind)

~~Bevor wir den Satz beweisen, einige Anwendungen.~~

~~Bemerkung:~~ Wegen Proposition 2.3 ist eine äquivalente Formulierung des Satzes:

Zwei Knoten  $k, k'$  sind p.l. - äquivalent, genau dann wenn bel. Diagramme .....

Der Satz von Reidemeister liefert eine wichtige Möglichkeit, Knoten anhand von Diagrammen zu unterscheiden:

Können wir einem Knotendiagramm  $D$  eines Knotens  $k$  eine Eigenschaft oder "math. Größe" (z. B. Zahl, Polynom, Vektorraum, Gruppe....) zuordnen, so dass sich diese Eigenschaft oder Größe nicht unter Reidemeister-Bewegungen verändert, so ist dies folglich eine Eigenschaft oder Größe des Knotens  $k$  selbst, d. h. hängt nicht vom gewählten Diagramm ab.

Bsp.: Einem Knotendiagramm  $D$  ordnen wir die Anzahl der Kreuzungen zu. Dies ist offenbar nicht ~~invariant~~ invariant unter Reidemeister-Bewegungen

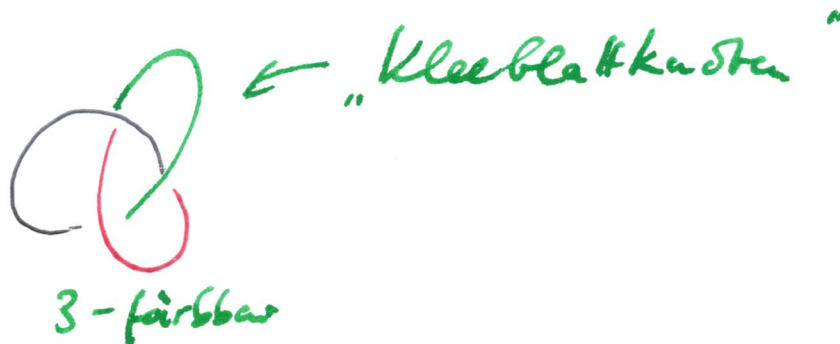
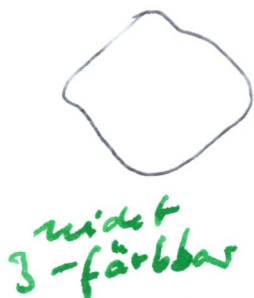


# 4. Färbbarkeit

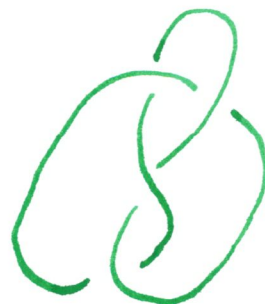
Def 4.1 : Wir sagen, ein Diagramm  $D$  ist 3-färbbar, wenn wir aus 3 vorgegebenen Farben jedem (unüberdeckungsfreien) Segment des Diagramms eine Farbe zuordnen können, so dass gilt:

- (i) An jeder Kreuzung kommen entweder 3 Segmente der gleichen Farbe zusammen, oder alle 3 Farben sind verschieden.
- (ii) Es treten insgesamt alle 3 Farben auf.

Bsp:



Übung: Das ~~Bsp~~ Diagramm des "Adiuterknotens" ist nicht 3-färbbar:

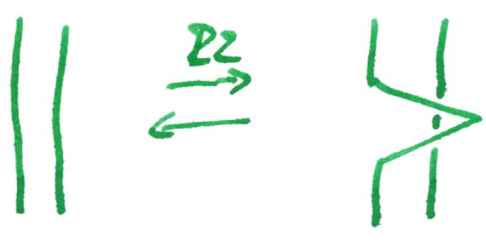




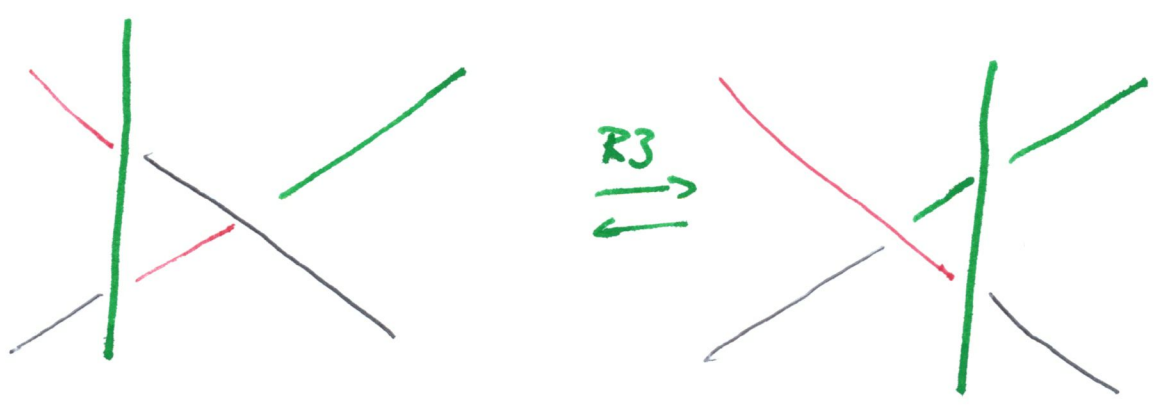
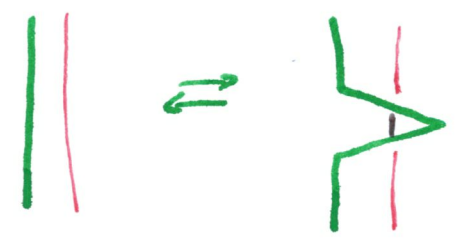
Prop 4.2.

3-Färbbarkeit ist invariant unter Reidemeister-Bewegungen.

Beweis:



oder



(und weitere Fallunterscheidungen für R3...)



Korollar 4.3:

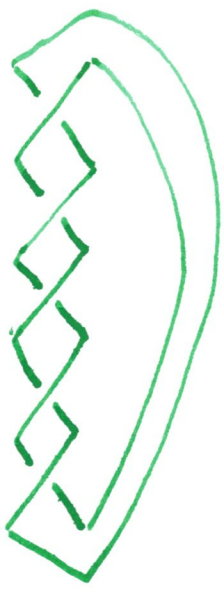
Der Kleeblattknoten ist verschieden vom trivialen Knoten und verschieden vom Adterknoten

Beweis: Kleeblattknoten ist 3 färbbar, Linknoten und Adterknoten nicht!



Für die Übungen brauchen wir noch folgende Klasse von Knoten:

n viele Kreuzungen (für  $n \geq 5$ )



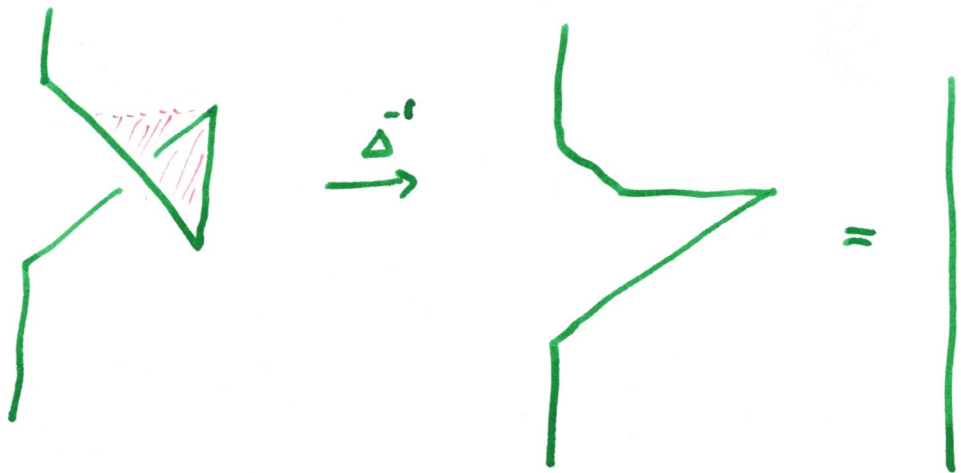
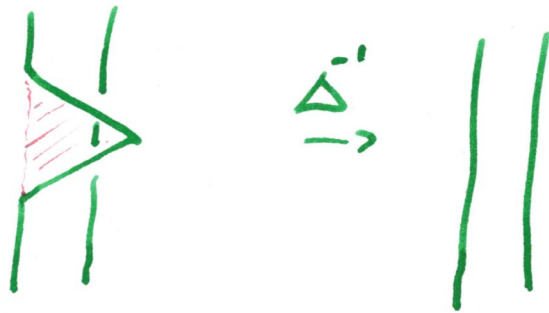
nennen wir  $T(2, n)$

- Für  $n$  ungerade erhalten wir einen Knoten
- $T(2, 3)$  ist der Kleeblattknoten (genauer, der „rechtskändige“)
- Für  $n$  gerade erhalten wir eine „2-komponentige Verschlingung“, dazu später mehr ...

Beweisokizze des Satzes von Reidemeister:

( $\Leftarrow$ ) Gegeben zwei Diagramme  $D, D'$  von  $k$  und  $k'$ , die sich durch endlich viele Reidemeister-Bewegungen unterscheiden. Man sieht leicht, dass diese  $\Delta$ -äquivalent sind.

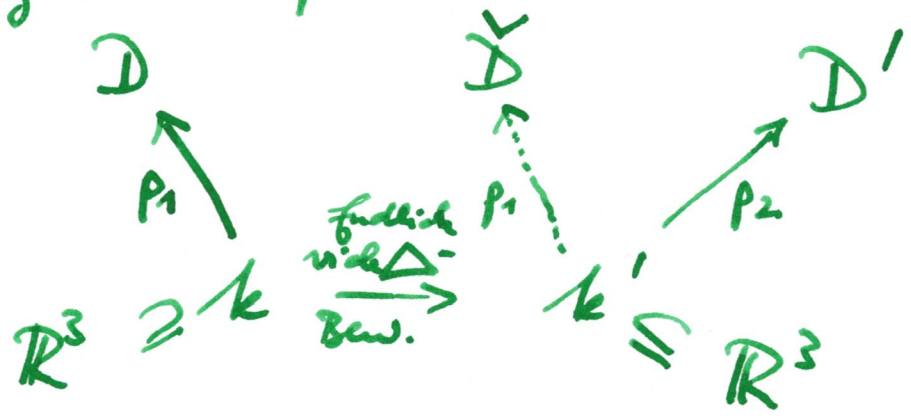
Bsp:





(=>) Ein Diagramm <sup>eines Knotens</sup> ist gegeben durch eine reguläre Projektion.

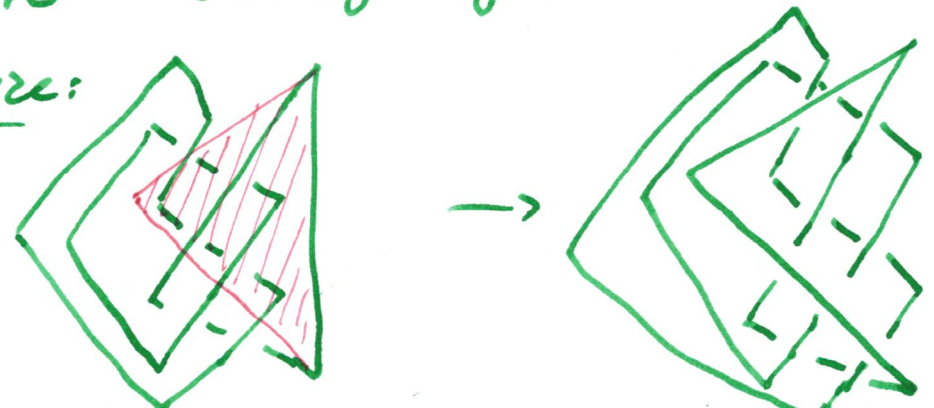
Die Ausgangssituation ist also folgendermaßen schematisierbar:



Wir wollen sehen, dass sich  $D$  in  $D'$  durch Reidemeister-Bewegungen überführen lässt.

- Man prüft zunächst leicht nach, dass für eine feste Projektion  $p_1$  jede  $\Delta$ -Bewegung durch eine endliche Anzahl von Reidemeister-Bewegungen realisiert wird, d.h.  $D'$  entsteht aus  $D$  durch Reidemeister-Bewegungen

Skizze:



(Man kann, bis auf Isotopie, <sup>21-</sup>  
jede  $\Delta$ -Bew. so wählen, dass  
bei gegebener regulärer Projektion  
~~das~~ diese Proj. immer noch  
regulär nach der  $\Delta$ -Bewegung  
ist.)

☛ Nun müssen wir noch zeigen,  
dass man  $\tilde{D}$  in  $D'$  durch  
Zeidenmeister-Bewegungen überführen  
kann. Dazu müssen wir noch  
(nicht-regulär) Projektionen genauer beschreiben:

- Man beobachtet zunächst, dass  
eine Projektion

$$p: \mathbb{R}^3 \longrightarrow E$$

(2-dim UVR)

längs eines 1-dim Untervektorraumes  $L$   
als orthogonal angenommen werden  
kann (andernfalls erhält man isotope  
Projektionen). Solche 1-dim UVR  
entsprechen Paaren von antipodalen  
Punkten auf  $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ , und so  
wollen wir uns Projektionen nun  
denken



• Gegeben sei also ein PL-Komplex  $k'$ , bestehend aus endlich vielen Vertices (Ecken) und Kanten. Eine Projektion ist regulär, wenn

- (i) nur <sup>endlich viele</sup> Doppelpunkte als Mehrfachpunkte auftreten
- (ii) kein Vertex von  $k'$  wird auf einen Doppelpunkt abgebildet.

Betrachten wir nun nicht-reguläre Projektionen, wo (ii) <sup>nicht</sup> auftritt: Jedem Vertex  $v$  von  $k'$  ordnen wir alle Geraden  $g$  zu, die  $k'$  nodal schneiden, und wir betrachten die zugeh. Geraden  $L_g$  durch den Ursprung.

Projektionen  $\pi_g$  entlang  $L_g$ 's sind nicht-regulär. Zu jedem Vertex  $v$  erhält man so eine Vereinigung  ~~$S^0$  von antipodalen~~  
~~Punktpaaren auf  $S^2$~~



-23-

$S_v$  von 1-dimensionalen  
 "Geradenstücken" auf  $S^2$   
 (jeweils antipodal), so dass  
 die zugehörigen ~~Geraden~~ Projektionen  
 (ii) verletzen.

$$\bigcup_{\substack{v \\ \text{Vertex} \\ \text{von } k}} S_v \subseteq S^2$$

ist nun wieder eine endliche  
 Vereinigung von 1-dim.  
 Geradenstücken.

Alle Projektionen, die durch  
 $S^2 \setminus \bigcup_v S_v$  charakterisiert  
 sind, erfüllen nun (ii).

Ähnlich zeigt man nun,  
 dass Dreifachpunkte nur  
 bei Projektionen in einer  
 1-dimensionalen Geraden-  
 stücke  $T \subseteq S^2$   
 auftreten können.

endlichen  
 Vereinigung

(\* weil  $k$  1-dim.  
 ist.



Mehrfachpunkte von Ordnung  $\geq 4$  treten nur (wenn überhaupt) ~~in einer Vereinigung~~ bei Projektionen auf, die durch ~~die~~ einer endlichen Vereinigung von Punkten auf  $S^2$  charakterisiert sind. Diese wollen wir  $R$  nennen.

Bilanz: • Alle Projektionen im Komplement von

$$\cup S_0 \cup T \cup R$$

sind regulär.

• Je zwei reguläre

Projektionen  $P_0, P_1$  können durch eine Familie von Projektionen ~~die~~ verbunden werden, die durch eine Polygonzug auf  $S^2$  charakterisiert sind, der nur singuläre Projektionen ~~die~~ vom Typ " $\cup S_0 \cup T$ "

-25-

enthält (und nicht vom Typ  $\bar{R}$ ).

Jede Überkreuzung eines  
1-dim. Segments aus  $US_0 \cup \bar{T}, \bar{R}$   
lässt sich durch Reidemeister-  
Bewegungen erhalten (man  
überzeuge sich selbst).





## II. Einige klassische numerische Knoten-Invarianten

---

### 1. Minimale Kreuzungszahl

Definition<sup>1.4</sup>: Sei  $k$  ein Knoten,  
 und sei  $n(D)$  die Anzahl  
 der Kreuzungen eines Diagramms  
 $D$ . Die minimale Kreuzungs-  
 zahl  $c(k)$  eines Knotens  $k$   
 ist definiert durch

$$c(k) := \min \{ n(D) \mid \begin{array}{l} D \text{ ist Diagramm} \\ \text{von } k \end{array} \}.$$

Ein Diagramm von  $k$  mit  
 $c(k)$  Kreuzungen heißt  
minimales Diagramm von  $k$ .

Das Spiegelbild eines Knotens  $k$ ,  
 bezeichnet mit  $\bar{k}$  ist der  
 Knoten, den man aus  $k$  durch  
 Spiegelung an einer Ebene  $E \subseteq \mathbb{R}^3$   
 erhält.

-27-

Fassen wir den Knoten  $k$  mit  
 Bild in  $S^3$  auf, so ist  $\bar{k}$   
 der Knoten, den man durch  
 orientierungsumkehrnden Diffeo-  
 morphismus  $S: S^3 \rightarrow S^3$  aus  
 $k$  erhält,  $\bar{k} = S(k)$ .

Dass diese Definition nicht von der  
 Wahl von  $E$  abhängt, liegt daran,  
 dass  $SO(3)$  zusammenhängend ist,  
 und dass für je zwei Spiegelungen

$S, T$  gilt:  $S = Ta$   
 für ein  $a \in SO(3)$ .  
 (oder  $S = bT$   
 mit  $b \in SO(3)$ ).

*(an Ebenen  
 durch  $O \in \mathbb{R}^3$ )*

Übungsaufgabe:

Hat ein Knoten  $k$  ein Diagramm  
 mit nur 2 Kreuzungen, so ist  
 $k$  der Unknoten.

Korollar<sup>1.2</sup>:  $c(\text{Kleeblattknoten}) = 3$ ,  
 denn wir haben schon gesehen,  
 dass der Kleeblattknoten verschieden  
 vom Unknoten ist.



-28-

Wie wir später sehen werden,  
ist der Kleeblattknoten nicht  
isotop zu seinem Spiegelbild. (Aber der  
8er-Knoten!)

Übungsaufgabe:



Hat ein Knoten  
 $K$  ein ~~Diagramm~~  $c(K) = 3$   
mit ~~nur~~ 3 Kreuzungen, so ist  
er äquivalent zum Kleeblattknoten  
oder seinem Spiegelbild.

Korollar<sup>1.3</sup>:  $c(\text{Achtersknoten}) = 4$   
(sobald wir wissen, dass 8er Knoten  
verschieden vom 1er Knoten ist)

Es gibt zu jeder Zahl  $n$   
nur endlich viele Knoten mit  
Kreuzungszahl  $n$ . (Man kann das  
zeigen). Es gibt Knotentabellen,  
in denen Knoten nach ihrer  
Kreuzungszahl aufgelistet sind,  
siehe z.B. [Breda & Zieschang, Polster]

Aber beispielsweise gibt es schon  
2176 Knoten mit Kreuzungszahl  
12.



## 2. Die Entknotungszahl

### Lemma 2.1:

Sei  $D$  ein Knotendiagramm mit  $n$  Kreuzungen. Dann kann man durch höchstens  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  Kreuzungsweddel ein Diagramm des Unknotens erhalten.

### Definition 2.2:

Sei  $k$  ein Knoten. Sei  $n(D)$  die <sup>minimale</sup> Anzahl der Kreuzungen eines ~~eines~~ nur ein Knotendiagramm  $D$  in ein Diagramm des Unknotens zu überführen. Die Entknotungszahl von  $k$  ist definiert durch

$$u(k) := \min \{ n(D) \mid D \text{ ist Diagramm von } k \}$$

Bsp.:



haben beide Entknotungszahl 1, wobei noch zu zeigen ist, dass  $85 \neq$

Beweis des Lemmas:

(wählt am inneren Kreuzung)

Man starte irgendwo und folge dem Knotendiagramm in eine der beiden Richtungen.

An jede Kreuzung trifft man 2 mal, einmal über, einmal unterkreuzend. Sei  $n_+$  die Anzahl der Kreuzungen, bei denen man beim ersten Auftreten eine

Überkreuzung antrifft, entsprechend  $n_-$ . Es ist  $n_+ + n_- = n$ , also  $n_+ \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  oder  $n_- \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

OBdA  $n_- \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Wir wedersuchen alle diese  $n_-$  Unterkreuzungen zu Überkreuzungen. Dann haben wir  ~~$n$  Überkreuzungen, dann  $n$  Unterkreuzungen.~~ Dies ist ein

~~Diagramm der Unterkreuzungen.~~





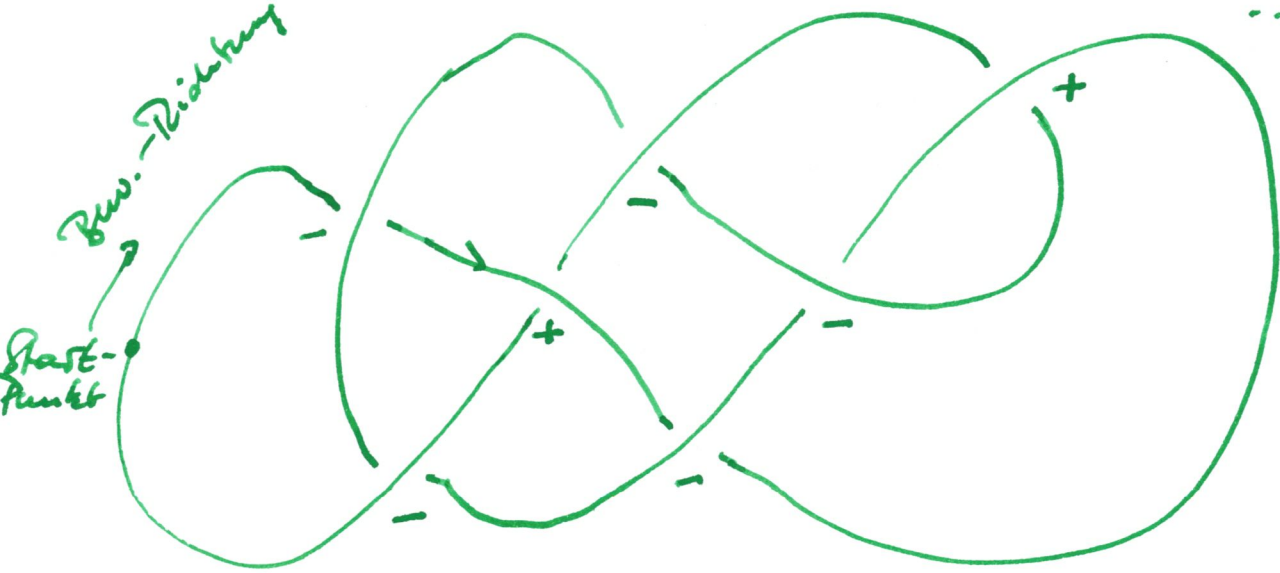
Dann haben wir ein Knoten-  
 diagramm bei dem wir ~~wir~~ beim  
 ersten Auftreffen jeder Kreuzung ~~z~~  
 überkreuzen. Man sieht daraus,  
 dass man den Knoten so rekon-  
 struieren kann, dass ~~er~~ seine  
 Projektion auf die Projektionsrichtung  
 zuerst strikt monoton wachsend ist,  
 dann strikt monoton fallend bis  
 zum Anfangspunkt. Von der Seite  
 betrachtet hat so ein Knoten ein  
 Diagramm, das ~~er~~ jede "Höhenlinie"  
 nur 2 mal schneidet. Das muss  
 ein Diagramm des Unknotens sein.

(Siehe Illustrationen nächste  
 beide Seiten!)

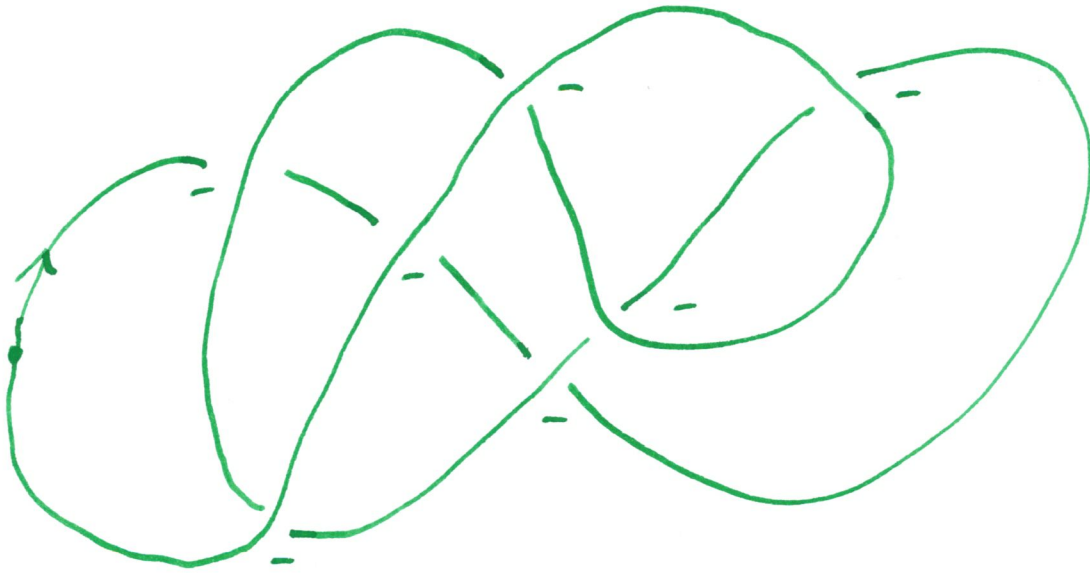


### Kreuzung mit

- markiert, wenn Unter-Kreuzung bei erstem Auftreten
- + ... Über-Kr. ... bei erstem Auftreten.



Änderung ⊕-Kreuzungen in ⊖-Kreuzungen:



~~Von hier  
Start:~~

Von der Seite gesehen:



Start-  
Punkt.



-34-

# ~~III~~ 3. Verschlüngen, ~~Windungszahl~~, Verschlingungszahl

---

Def. 3.1: Eine  $n$ -komponentige  
Verschlingung ist eine  
(PL-) Einbettung

$$\coprod_{i=1}^n S^1 \longrightarrow S^3$$

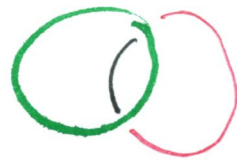
Die Definitionen und Sätze aus I und II.  
I.1. bis I.3. haben offensichtliche  
Verallgemeinerungen zu Verschlingungen.

(Nicht so "3-Färbbarkeit":



Nur  
2 Farben

$\xrightarrow{\mathbb{R}^2}$



3 Farben

)



Wir können auch orientierte Knoten oder Verschlingungen untersuchen, indem wir die einzelnen Komponenten  $S^1$  mit einer Orientierung versehen, die sich auf das Bild überträgt. Es gibt  $2^n$  ~~alle~~ mögliche Orientierungen für eine  $n$ -komp. Verschlingung.

Die Def<sup>n</sup> und Sätze aus I.1 bis I.3 <sup>und II.</sup> haben auch offensichtliche Kvally. zu orientierten Verschlingungen.

Bsp.:



Sind diese beiden orientierten Knoten äquivalent?

Übungsaufgabe: Der Achsenknoten  $4_1$  ist äquivalent zu seiner „Umkehrung“

↳ Unter Umkehrung eines Knotens verstehen wir den selben Knoten mit der umgekehrten Orientierung.

38 - Notation:  $\rightarrow$  orientiert  $\Rightarrow$  -K Umkehrung. Notw.  
Zemerkung: Es gibt Knoten,  
 die nicht isotop zu ihrer  
 Umkehrung sind (aber: erst relativ  
 spät  ~~$\approx 1960, 1970$~~  gefunden).  
 1964

Sind die 2-komp. Verschlingungen



verschieden oder gleich?

3.2  
Def. (Verschlingungszahl).

Sei  $L = K_1 \amalg K_2$  eine  
 2-komp. or. Verschlingung. Sei  $D$  ein  
 Diagramm von  $L$ . Jeder  
 Kreuzung der beiden Komponenten  
 in  $D$  ordnen wir eine Zahl  
 $+1$  oder  $-1$  zu:



"Rechte-  
 Hand-  
 Regel"

Sei  $lk(K_1, K_2)$  die Hälfte der Summe  
 aller Kreuzungen von  $K_1$  und  $K_2$   
 in  $D$ . Wir nennen dies die  
 Verschlingungszahl von  $K_1$  und  $K_2$

Prop. 3.3

(a)  $lk(k_1, k_2)$  ist wohl-definiert,  
d.h. nicht abhängig von der  
Wahl des Diagramms

(b)  $lk(k_1, k_2) = lk(k_2, k_1)$ ,  
 $lk(k_1 - k_2) = -lk(k_1, k_2)$ .

Beweis: Übung!

Bsp:

(1.)   $lk(k_1, k_2) = 0$

(2.)   $lk(k_1, k_2) = 1$ .

Diese Verschlingung heißt  
Kopf - Verschlingung.

(3.)  heißen Borromäische Ringe.

Für je zwei  
Komponenten  $k_1, k_2$   
ist offenbar

$lk(k_1, k_2) = 0$

Genauer: Je zwei Komp. sind aj. zu OO



Def 3.4.

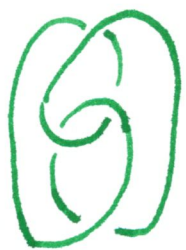
Ein Diagramm  $D$  eines Knotens oder einer Verschlingung  $L$  heißt alternierend, wenn sich Über- und Unterkreuzungen abwechseln, wenn man ~~eine beliebige~~ jede Komponente von  $L$  in  $D$  folgt.

Bsp: Obige Diagramme der Hopf-Verdrehung und der Borromäischen Ringe sind alternierend.

Bsp: Das Diagramm ebenfalls:



ist offenbar ein nicht-alternierendes Diagramm von  $3_1$ .



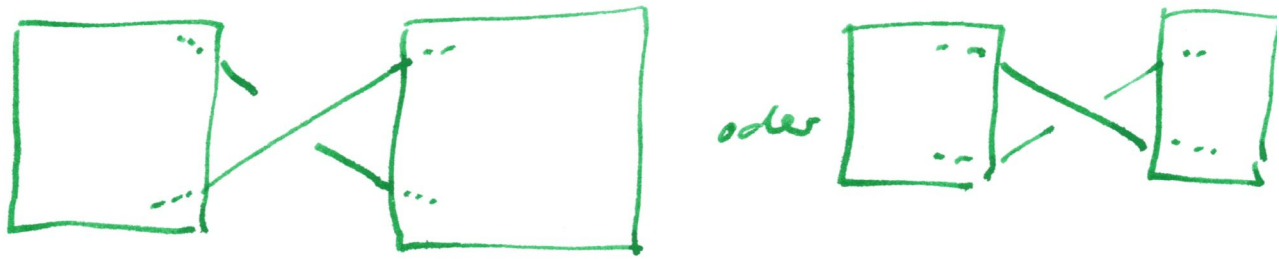
Frage 3.5: Gibt es Knoten, die überhaupt keine alternierenden Diagramme besitzen?  $\sim 3_1$

Tait erstellte  $\approx 1900$  die ersten Knotentabellen, ~~sortiert~~ <sup>geordnet</sup> nach minimaler Kreuzungszahl. Phänomenologisch (vermutlich) gelangte er zu folgender Vermutung:

Verm. 3.5 Ein reduziertes alternierendes Knotendiagramm ~~realisiert~~ realisiert die minimale Kreuzungszahl des Knotens.

-33-

Def. 3.7. Ein Knoten- (oder Verteilungs-) Diagramm heißt reduziert, wenn



nicht auftritt, wobei der Rest des Diagramms jeweils in den Quadraten verläuft.

Beweis erst in den 1980ern !

Zwb. Nicht-reduzierte Diagramme sind offensichtlich nicht minimal bzgl. der Kreuzungszahl.

Veru. 3.6. (Teil)

Ein nicht-alternierendes Diagramm eines alternierenden Knotens ist nicht-minimal

# III. Die Kaufman-Klammer und das Jones-Polynom

## 1. Die Kaufman-Klammer

### Def 1.1:

Die Kaufman-Klammer ist eine Abbildung, die einem nicht-orientierten Verschlingungsdiagramm ein Laurent-Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten zuordnet:

$$D \longmapsto \langle D \rangle \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}]$$

Verschl.-Diagramm

so dass folgendes gilt:

(i)  $\langle O \rangle = 1$  (Normalisierung)



(ii)  $\langle D \cup O \rangle = (-a^{-2} - a^2) \langle D \rangle$



(iii)  $\langle \text{X} \rangle = a \langle \text{)} \langle \text{)} \rangle + a^{-1} \langle \text{)} \rangle$

Hier sind nur die Bereiche eines Knotendiagramms dargestellt, die



-41-

in den drei Fällen unterschiedlich sind.

Zemerkung: In der Literatur existieren auch andere Normalisierungen!

Beob: (i) Für eine  $n$ -komponentiges Verschlingungs-Diagramm ohne Kreuzungen hat man mit (i) und (ii)

$$\langle D \rangle = (-a^2 - a^{-2})^{n-1}$$

(ii) Durch wiederholtes Anwenden ~~von (i) und (ii)~~ Anwenden von (iii) kann man ~~ein~~ die K-Klammer eines ~~beliebigen~~ beliebiges Diagramms mit  $n$  Kreuzungen als linear-komb. ~~von~~ Summe von ~~beliebigen~~ beliebig über  $\mathbb{Z}[a, a^{-1}]$  von  $2^n$  Kaufman-Klammer von kreuzungsfreien Diagrammen berechnen.

(iii) Durch Beob. (a) und (b) ist also die Kaufman-Klammer eindeutig festgelegt, sobald wir die Wohldefiniertheit gezeigt haben.

Übungsaufgabe: ~~Berechnet man die Kaufman-Klammer eines~~

-42-

Im Verfahren von (B) könnte das Ergebnis von der Reihenfolge der Auflösungen der Kreuzungen abhängen. Dies ist nicht der Fall.

---

Ist  $\langle \gamma \rangle$  eine Verschlingungs-invariante?

Lemma 1.2

$$\langle \gamma \rangle = -a^3 \langle \gamma \rangle$$

$$\langle \gamma \rangle = -a^{-3} \langle \gamma \rangle$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \langle \gamma \rangle &= a \langle \gamma \rangle \\ &\quad + a^{-1} \langle \gamma \rangle \end{aligned}$$

$$= (a \cdot (-a^{-2} - a^2) + a^{-1}) \langle \gamma \rangle$$

$$= -a^3 \langle \gamma \rangle$$

Entsprechend die 2. Gl.



Bsp:

$$(i) \langle \text{figure} \rangle = -a^4 - a^{-4}$$

$$(ii) \langle \text{figure} \rangle = a^{-7} - \cancel{a^{-3}} - a^5$$

Zu (ii)

$$\langle \text{figure} \rangle = a \langle \text{figure} \rangle + a^{-1} \langle \text{figure} \rangle$$

$$\stackrel{(i)}{=} a \cdot (-a^4 - a^{-4})$$

$$+ a^{-1} (-a^{-3})^2 \langle \text{figure} \rangle$$

$$= -a^5 - a^{-3} + a^{-7}$$



# Beobachtung:

Sei  $D$  ein Diagramm einer Verküpfung  $L$ . Dann erhält man ein Diagramm  $\bar{D}$  von  $\bar{L}$ , indem man alle Kreuzungen von  $D$  wedselt. (Im Folgenden bezeichnen wir mit  $\bar{D}$  immer das so <sup>aus  $D$</sup>  erhaltene Diagramm von  $\bar{L}$ .)

## Bsp:



$S_{20}$



$\bar{S}_{20}$

(Beweis: Betrachte  $L$  „von hinten“)

- erhalte als Projektion das Spiegelbild, aber mit umgekehrten Kreuzungen.
- Spiegle nun: erhalte ursprüngliche Proj. zurück, aber die geänderten Kreuzungen bleiben erhalten)

Aus (iii) folgt also

$$\langle \bar{D} \rangle = \overline{\langle D \rangle}$$

wobei für  $p \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}]$  das Polynom  $\bar{p}$  durch Vertauschen von  $a$  und  $a^{-1}$  entsteht.

(Denn  $\langle X \rangle = a \langle \rangle \langle \rangle + a^{-1} \langle X \rangle$ )

$$\Rightarrow \langle X \rangle = a \langle X \rangle + a^{-1} \langle \rangle$$

Dies erklärt die Symmetrie in Lemma 1.2.

Lemma 1.3

$\langle D \rangle$  ist invariant unter Reidemeister-II- und -III-Bewegungen, d.h.

$$\langle X \rangle = \langle \rangle \langle \rangle$$

Dies. unbed. entscheiden sich nur für den dargestellten Beweis

und

$$\langle \text{diagram 1} \rangle = \langle \text{diagram 2} \rangle$$

Diagram 1: A crossing of two lines with a small circle around the crossing point.

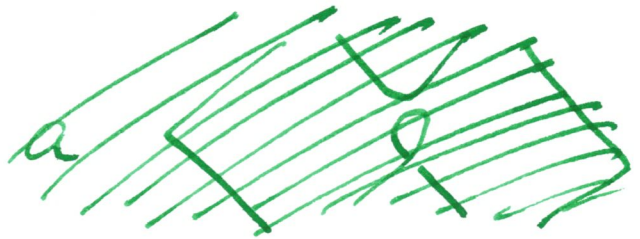
Diagram 2: A crossing of two lines with a small circle around the crossing point, rotated 90 degrees.

Beweis:

$$\langle \text{diagram 1} \rangle \stackrel{(iii)}{=} a \langle \text{diagram 3} \rangle + a^{-1} \langle \text{diagram 4} \rangle$$

Diagram 3: A crossing of two lines with a small circle around the crossing point.

Diagram 4: A crossing of two lines with a small circle around the crossing point, rotated 90 degrees.



~~+ a^{-1}~~

$$a \langle \text{diagram 1} \rangle + a^{-1} \langle \text{diagram 4} \rangle$$

$$= a^2 \langle \text{diagram 5} \rangle + \langle \text{diagram 6} \rangle$$

Diagram 5: A crossing of two lines with a small circle around the crossing point.

Diagram 6: A crossing of two lines with a small circle around the crossing point, rotated 90 degrees.

Zusatz  
1.2

$$a^2 \langle \text{diagram 5} \rangle + a^{-1} (-a^3) \langle \text{diagram 7} \rangle + a^{-1} \langle \text{diagram 8} \rangle$$

Diagram 7: A crossing of two lines with a small circle around the crossing point.

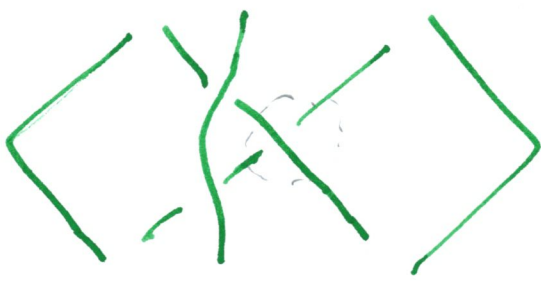
Diagram 8: A crossing of two lines with a small circle around the crossing point, rotated 90 degrees.

$$+ \langle \text{diagram 9} \rangle$$

Diagram 9: Two separate lines, one above the other.

$$= \langle \text{diagram 9} \rangle$$





$$(iii) = a \text{ [Diagram 1]} + a^{-1} \text{ [Diagram 2]}$$

The first diagram shows two strands crossing with the top strand on the left and the bottom strand on the right. The second diagram shows two strands crossing with the top strand on the right and the bottom strand on the left.

Isotopie  
= und  
2π-  
Invarianz

$$a \text{ [Diagram 1]} + a^{-1} \text{ [Diagram 2]}$$

The diagrams are identical to those in the previous block, illustrating isotopy and 2π-invariance.

$$(iii) = \text{[Diagram 1]}$$

The diagram is identical to the first diagram in the previous block, showing a crossing with a dashed circle around it.



Def: 1.4

Sei  $D$  ein Diagramm einer orientierten Verdringung.

$$w(D) = \sum_{\text{alle Kreuzungen}} \pm 1$$

heißt Windungszahl oder Verwirrungszahl von  $D$ .

Beob.:

$w(D)$  ist invariant unter Reidemeister - II - Bewegungen und Reidemeister - III - Bewegungen, sie ändert sich um  $\pm 1$  bei Reidemeister - I - Bewegungen.

$$w(\uparrow\downarrow) = w(\uparrow\uparrow)$$

$$w(\uparrow\downarrow) = w(\downarrow\downarrow), \dots$$

$$w(\downarrow\uparrow) = w(\downarrow\downarrow) - 1$$

$$w(\downarrow\uparrow) = w(\downarrow\downarrow) + 1$$

Sowohl die Kauffman-Klammer als auch die Verwindungszahl sind R-II- & R-III-invariant, wobei sich beide auf verstandene Art unter R-I-Bew. verändern

$\Rightarrow$  Spiele sie gegeneinander aus und halte:

# Satz 1.5

Sei  $D$  ein Diagramm einer orientierten Verschlingung  $L$ . Dann ist

$$X(D) := (-a)^{-3w(D)} \cdot \langle D \rangle \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}]$$

invariant unter allen Reidemeister-Bewegungen, also eine ~~Ver-~~ Invariante der orientierten Verschlingung  $L$ .

Beweis:

$$\begin{aligned} X(\gamma) &= (-a)^{-3w(D^r)} \cdot \langle \gamma \rangle \\ &= (-a)^{-3(w(\gamma) + 1)} \cdot (-a)^3 \cdot \langle \gamma \rangle \end{aligned}$$

→  
Stige Formeln  
für  $w$   
und  
Lemma 1.2

$$= X(\gamma)$$

Genauso:  $X(\gamma^r) = X(\gamma)$  □



Beispiele:

(i) oben:  $X(\mathcal{O}) = (-a)^{-6} \cdot \langle \mathcal{O} \rangle$   
 $= (-a)^{-6} \cdot (-a^4 - a^{-4})$   
 $= -a^{-2} - a^{-10}$

$\Rightarrow V(\mathcal{O}) = -t^{1/2} - t^{5/2}$

genauso:  $V(\mathcal{O}) = -t^{-1/2} - t^{-5/2}$

(ii)  $X(\mathcal{O}) = (-a)^{-9} \cdot \langle \mathcal{O} \rangle$   
 $\stackrel{s.o.}{=} (-a)^{-9} \cdot (-a^5 - a^{-3} + a^{-7})$   
 $= a^{-4} + a^{-12} - a^{-16}$

$\Rightarrow V(\mathcal{O}) = t + t^3 - t^4$

Def 1.6

Das Jones-Polynom der orientierten Verschlingung  $L$  ist definiert durch

$$V(L) := X(L) \Big|_{t^{1/2} = a^{-2}}$$

$$\in \mathbb{Z} [t^{-1/2}, t^{1/2}]$$

Wir fassen hier  $t^{1/2}$  als formale Variable auf mit Inverses  $t^{-1/2}$ , wir schreiben aber  $t$  respektive  $t^{-1}$  für deren Quadrate,  $t^{-3/2}$  resp.  $t^{3/2}$  für deren Kuben....

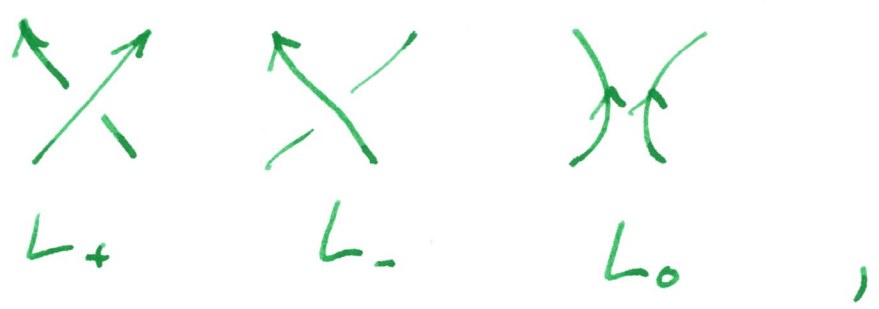
- Übung:
- $V(L)$  ist wirklich ein Polynom in  $t^{1/2}, t^{-1/2}$
  - (Beachte: Es geben Polynome der Form  $a^{\pm 3}$  in der Kaufmann-Klammer auf ....)
  - $V(L)$  ist ein Polynom in  $t, t^{-1}$  für eine or. Versch.  $L$  mit ungeradzahlig vielen Komponenten.

Satz 1.7

Das Jones-Polynom hat die folgenden beiden Eigenschaften

(i)  $V(\bigcirc) = 1$

(ii) Sind  $L_+$ ,  $L_-$  und  $L_0$  drei Verschlingungen, die überall gleich sind außer in der Umgebung eines Punktes, wo sie sich wie folgt unterscheiden,



dann gilt

$$t^{-1} V(L_+) - t V(L_-) + (t^{-1/2} - t^{1/2}) V(L_0) = 0$$

Beweis:



Wir haben mit (iii) der Definition:

(1.)  $\langle \nearrow \rangle = a \langle \rangle \langle \rangle + \bar{a}' \langle \searrow \rangle$

(2.)  $\langle \searrow \rangle = \bar{a}' \langle \rangle \langle \rangle + a \langle \nearrow \rangle$

a · (1.) - \bar{a}' (2.) liefert

(3.)  $a \langle \nearrow \rangle - \bar{a}' \langle \searrow \rangle = (a^2 - \bar{a}'^2) \langle \rangle \langle \rangle$

Vergleicht man  $L_+$ ,  $L_-$  und  $L_0$ , sieht man, dass

$$w(D_+) - 1 = w(D_-) + 1 = w(D_0)$$

Man multipliziert nun (3.) mit  $(-a)^{-3w(L_0)}$ , so erhält man

$$- a^4 (-a)^{-3w(D_+)} \langle D_+ \rangle + a^{-4} (-a)^{-3w(D_-)} \langle D_- \rangle = (a^2 - \bar{a}'^2) \llcorner (-a)^{-sw(D_0)} \langle D_0 \rangle$$

$$\Leftrightarrow - t^{-1} V(L_+) + t V(L_-) = \begin{pmatrix} t^{-1/2} & t^{1/2} \\ & V(L_0) \end{pmatrix}$$



Mit Satz 7.1 lässt sich das Jones-Polynom eines Knotens oft viel schneller berechnen als direkt mit der Kaufman-Klammer.

Bsp.:

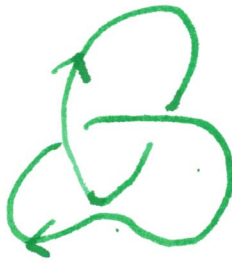
linkshändig



=: L.



=: L\_+



=: L\_0

Diese 3 Verschl. unterscheiden sich wie im Satz 1.7.

Also:

$$\overline{V}(\mathcal{B}) = t^{-2} V(\mathcal{D}) + t^{-1} \cdot (t^{-1/2} - t^{1/2}) \cdot V(\text{neg. Kopf-Verschl.})$$

obiges  
Bsp nach  
Satz 1.5

$$= t^{-2} + t^{-1} \cdot (t^{-1/2} - t^{1/2}) \cdot (-t^{-1/2} - t^{-5/2})$$

$$= -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$$

Wir sehen also:  $V(\mathcal{B}) + V(\mathcal{D})$ , d.h. der linkshändige Kleeblattknoten ist nach Satz 1.5 verschieden vom rechtshändigen seinem Spiegelbild.

## 2. Jones-Polynom und Kreuzungszahl

-55-

Im Folgenden wollen wir zeigen, dass das Jones-Polynom untere Schranken an die minimale Kreuzungszahl liefert, und dass alternierende Knoten dabei eine ~~ausgezeichnete~~ besondere Rolle spielen.

Zunächst eine Reformulierung der Kaufmann-Klammer als „Zustandsumme“.

Def 2.1 Sei  $D$  ein <sup>Kreuzungs-</sup>Diagramm mit  $n$  Kreuzungen, die durchnummeriert seien (mit  $i = 1, 2, \dots, n$ ).

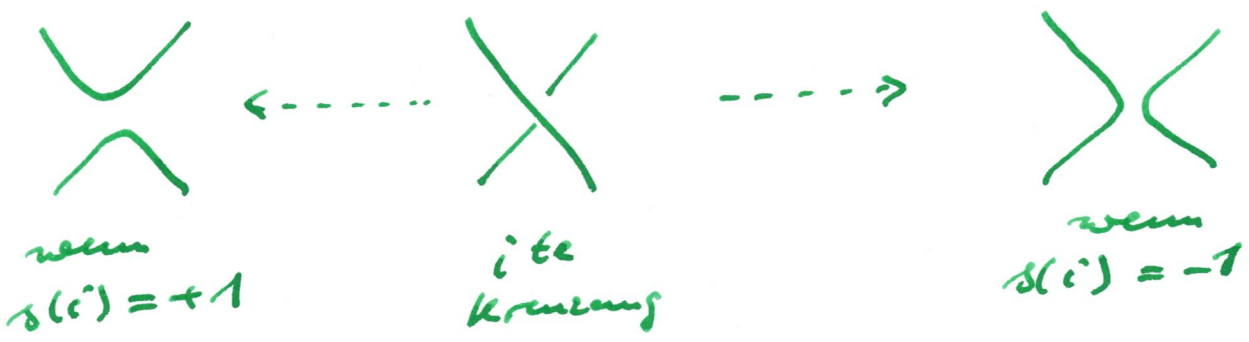
Ein Zustand  $s$  (wie „state“) ist eine Abb., die jeder Kreuzung ein Element in  $\{-1, 1\}$  zuordnet, oder alternatio eine Abb

$$s: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{-1, 1\}.$$

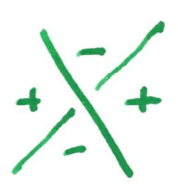
Zu einem Diagramm mit  $n$  Kreuzg. gibt es also  $2^n$  Zustände.



Ein Zustand  $s$  liefert uns ein kreuzungsfreies Diagramm  $sD$ , wenn wir Kreuzungen wie folgt auflösen:



Merke:



"Links von ankommender 'Überschneidung' steht -, rechts +"

$s(\text{Kreuzung}) = -1 \Rightarrow \ominus$ -Regionen werden verbunden

$+1 \Rightarrow \oplus$ -Regionen

$sD$  hat also keine Kreuzung mehr. Sei  $|sD|$  die Anzahl der Komponenten von  $sD$ . Wir haben bereits folgende Beobachtung gemacht, die wir nun in der neuen Schreibweise ausdrücken:

$$\langle D \rangle = \sum_{\substack{\text{alle} \\ 2^n \text{ Zustände}}} a^{\sum_{i=1}^n s(i)} (-a^{-2} - a^2)^{|sD|-1}$$

mit  $\uparrow$   $n$  kreuzg.

Seien  $s_+$  und  $s_-$  die konstanten Zustände mit

$$s_+(i) = 1 \quad \forall i$$
$$s_-(i) = -1 \quad \forall i$$

Diese liefern die höchsten bzw. niedrigsten Potenzen in  $a^{\sum s(i)}$ .

Definition: Ein Diagramm  $D$  heißt plus-adäquat, falls

$$|s_+ D| > |s D|$$

$$\forall s \text{ mit } \sum s(i) = n-2$$

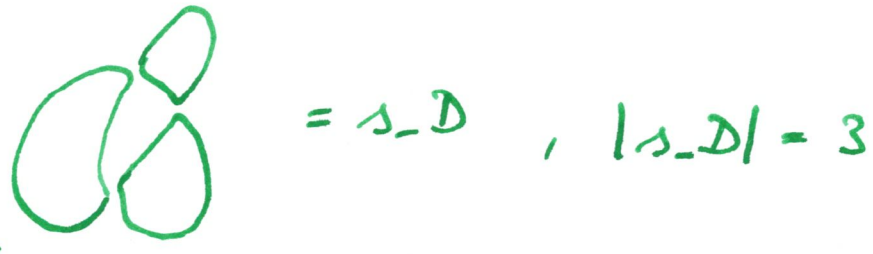
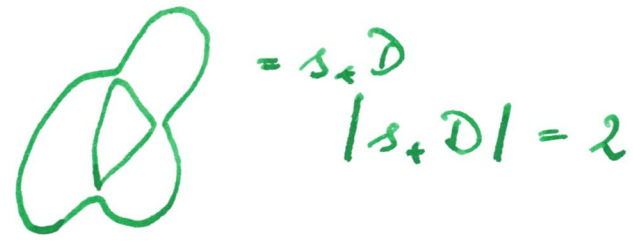
und minus-adäquat, falls

$$|s_- D| > |s D|$$

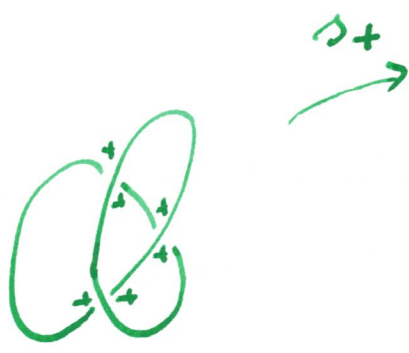
$$\forall s \text{ mit } \sum s(i) = 2-n.$$

Falls beide Bedingungen gelten, heiße das Diagramm adäquat.

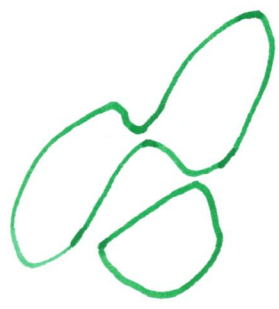
Bsp:



ist adäquat.



$|s_+D| = 1$



$|s_-D| = 2$

ist weder  $\oplus$  noch  $\ominus$ -adäquat.

Übung:



ist minus-adäquat, aber nicht plus-adäquat



genau umgekehrt!

genau dann

Beob:  $D$  ist adäquat, wenn man entlang jeder Komponente von  $s_+D$  bzw.  $s_-D$  an jede Kreuzung nur ein Mal kommt.

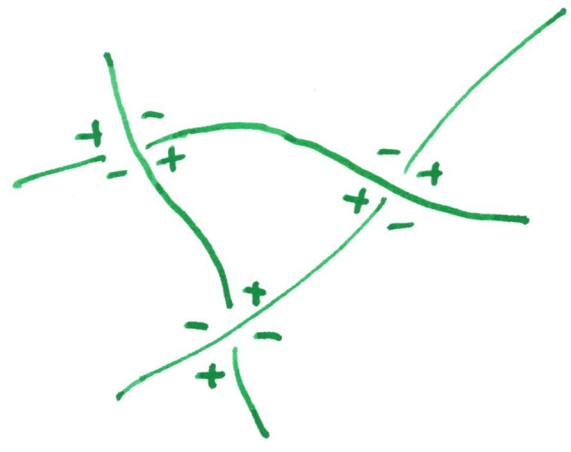
Übung: Unterscheiden sich zwei Zust.  $s, s'$  in nur einer Kreuzung, so ist  $|sD| = |s'D| \pm 1$



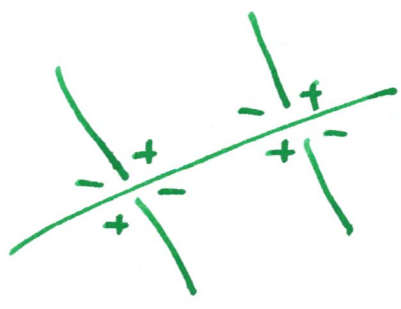
Prop 2.2

Ein reduziertes alternierendes Diagramm ist adäquat.

Beweis:



Die  $\oplus$ - bzw.  $\ominus$ -  
 Markierungen an  
 Kreuzungen setzen  
 sich ~~kollektiv~~  
 verträglich auf  
 die Komplemente der  
 Projektion fort.



Wegen der Reduziert-  
 heit treffen an jeder  
 Kreuzung nur  
verschiedene Komplemente  
 aufeinander.

Folgt man also einer bel. ~~Komponente~~  
 Komponenten von  $s_+D$  bzw.  $s_-D$ ,  
 so gelangt man also an jede Kreuzung  
 nur ein Mal. ▣

Sei  $P$  ein Polynom  $\in \mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ . -60-

Wir bezeichnen mit

$M(P)$  die höchste Potenz  
 $m(P)$  die kleinste Potenz

von  $P$ , sowie mit  $\text{span}(P) := M(P) - m(P)$   
die „Spannweite“.

Bsp:  $P = x^7 - x^{-2}$ . Dann ist  
 $\text{span}(P) = 9$ .

Lemma 2.3 Sei  $D$  ein Verschlingungs-  
diagramm mit  $n$  Kreuzungen.

Dann ist

(i)  $M\langle D \rangle \leq n + 2|s_+ D| - 2$   
mit Gleichheit, wenn  $D$   
plus-adäquat ist

(ii)  $m\langle D \rangle \geq -n - 2|s_- D| + 2$   
mit Gleichheit, wenn  $D$   
minus-adäquat ist

(iii)  $\text{span}\langle D \rangle \leq 2n + 2|s_+ D| + 2|s_- D| - 4$   
mit Gleichheit, wenn  $D$   
adäquat ist.

Beweis:

-51-

Zunächst eine Schreibweise:

$$\langle D | s \rangle := a^{\sum s(i)} (-a^{-2} - a^2)^{|sD|-1}$$

↑  
Zustand

ist der Beitrag von  $s$  zu  $\langle D \rangle$ ,  
d.h.

$$\langle D \rangle = \sum_s \langle D | s \rangle$$

Offensiv ist  $\sum s_+(i) = n$

$$\Rightarrow n \langle D | s_+ \rangle = n + 2 |s_+ D| - 2$$

Nun kann jeder beliebige Zustand  $s$  aus  $s_+$  durch eine Folge von Zuständen  $s_0, \dots, s_k$  mit

$$s_0 = s_+, \quad s_k = s,$$

$$s_{r-1}(i) - s_r(i) = 2 \quad \text{für ein } i = i_r,$$

$$s_{r-1}(j) - s_r(j) = 0 \quad \forall j \neq i$$

halten werden, d.h. man kippt sukzessive nur eine Kreuzg. von  $+1$  nach  $-1$ .

Also: 
$$\sum_{i=1}^n s_r(i) = n - 2r$$

Oben haben wir gesehen:  $|s_r D| = |s_{r-1} D| \pm 1$



-62-

Daher: 
$$M \langle D | s_{r-1} \rangle - M \langle D | s_r \rangle = 0 \text{ oder } 4,$$

$\Rightarrow$  insb. 
$$M \langle D | s_r \rangle \leq M \langle D | s_{r-1} \rangle + 4$$

$\Rightarrow$  
$$M \langle D | s \rangle \leq n + 2 |s_+ D| - 2$$

$\Rightarrow$  
$$M \langle D \rangle \leq n + 2 |s_+ D| - 2.$$

Ist  $D$  plus-adäquat, so ist

$$|s_+ D| = |s_+ D| - 1,$$

also ist  $M \langle D | s_+ \rangle = M \langle D | s_+ \rangle - 4$

$\Rightarrow$  
$$M \langle D | s \rangle < n + 2 |s_+ D| - 2$$

für alle  $s \neq s_+$ .

Genauso für (ii) mit  $|s_- D|$  und bei  $s_-$  anfangend.

(iii) ergibt sich aus (i) und (ii).

Def 2.4 Kerschlingungs-  
 Für Diagramm  $D$  heiße  
 zusammenhängend, falls die zugeh.  
 Projektion zusammenhängend ist.

Bsp:

 zush.

 zush.

 nicht  
zush.

Lemma 2.5 Sei  $D$  ein zusammen-  
 hängendes Kerschlingungs-Diagramm  
 mit  $n$  Kreuzungen. Dann ist

$$|s_+ D| + |s_- D| \leq n + 2$$

mit Gleichheit, wenn  $D$  alternierend  
 ist.

Beweis: Für die Ungleichung per Induktion

$$\underline{n=0} \quad \checkmark$$

$(n-1) \Rightarrow (n)$ : Man wähle eine  
 Kreuzung  $i$ . Für wenigstens eine  
 der beiden Möglichkeiten, die  
 Kreuzung aufzulösen, erhält man  
 ein zusammenhängendes Diagramm  
 $D'$  mit  $n-1$  Kreuzungen.

OBdA war dies die  $\oplus$ -Auf-  
lösung der Kreuzung  $i$ .

$$\Rightarrow s_+ D = s_+ D'$$

Offenbar ist  $|s_- D| = |s_- D'| \pm 1$ ,

denn  ~~$s_- D' = s_- D$~~

$$s_- D' = s_+ D$$

wobei sich  $s_+$  von  $s_-$  nur  
an der Stelle  $i$  unterscheidet.

Also:

$$|s_+ D| + |s_- D| = |s_+ D'| + |s_- D'| \pm 1$$

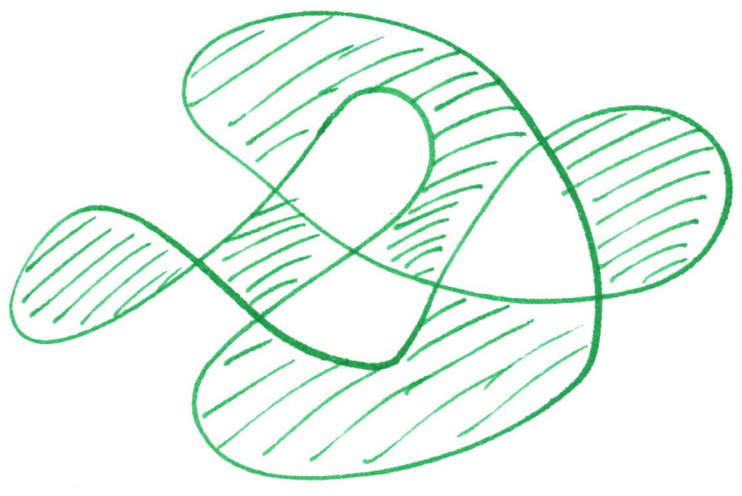
Ind.-  
 $\leq (n-1) + 2 \pm 1$


Annahme



$$\leq n + 2.$$



Sei nun  $D$  alternierend.




 - Fläche  
 Weiß:  
 - Fläche



(Hv: 5  - Flächen  
 4  - Flächen)

Beobachte nun:

$|s_+ D|$  ist die Anzahl der  - Flächen


$|s_- D|$  ist die Anzahl der  - Flächen.

Die Projektion eines Diagrammes liefert nun eine Zergliederung der 2-Sphäre (\*)

- Punkte = Kreuzungen  $\cup$  Vertices des Polygonzuges
- Strecken = Geradensegmente
- Flächen =  - Flächen und  - Flächen.

Die Euler-Charakteristik

(\*) = Ebene  
 $\cup \{p\}$

~~von~~  2-dim'lern  
eines simplicialen Komplexes  $K$   
ist gegeben durch

$$\chi(K) = \# \text{ Punkte} \\ - \# \text{ Strecken} \\ + \# \text{ Flächen}$$

Genauer  
in  
Vorlesung  
mit  
simplicialen  
Komplexen

Tatsache:  $\chi(K)$  hängt nur vom  
Homöomorphietyp von  $K$  ab.

Für eine simpliciale Zerlegung  
der 2-Sphäre ist z.B.

$$\chi(S^2) = 2$$



Bei uns:

$$2 = \chi(S^2) = \# \text{ Kreuzungen} - \# \text{ Segmente} \\ \text{zw. Kreuzungen}$$

$$+ \# (\oplus\text{-Flächen und} \\ \ominus\text{-Flächen})$$

$$= n - 2n + |S_+ D| + |S_- D|$$



# Satz 2.6

Sei  $D$  ein zusammenhängendes, alternierendes und reduziertes Diagramm einer Verschlingung  $L$  mit  $n$  Kreuzungen. Dann ist  $n$  die minimale Kreuzungszahl der Verschlingung  $L$ . Außerdem ist  $n = \text{spann}(V(L))$ .

(\*) in einem zusammenh. Diagramm.

## Beweis:

Nach Prop 2.2 ist ein alt., red. Diagramm adäquat. Folglich ist nach Lemma 2.3 und 2.5

$$\begin{aligned} \text{spann}(\langle D \rangle) &\stackrel{(*)}{=} 2n + 2|s_+ D| + 2|s_- D| - 4 \\ &= 4n + 4 - 4 \\ &= 4n \end{aligned}$$

Ebenso:  $\text{spann}(\langle \bar{a} \rangle \cdot \langle D \rangle) = 4n$


variablen-  
 $\Leftrightarrow$   $\text{spann}(V(L)) = n$   
 Tr.  
 $t^{1/2} = a^{-2}$

Hätte nun  $L$  ein Diagramm  $D'$  mit




$m < n$  Kreuzungen  
 so wäre nach Lemma 2.3 und  
 2.5  $\text{spann}(\langle D' \rangle) \leq 4m$

~~aber:  $\text{spann}(\langle D' \rangle)$  ist eine  
 Verschlingungsvariable~~

$\Leftrightarrow \text{spann}(V(L)) \leq 4m < n$   
 $\Downarrow$   


Anwendungen:

(1.)  $\text{spann}(\text{diagram}) = \cancel{6}$  |  $\Rightarrow$  Borr. Ringe sind versch. von 

bel. orientiert

$\text{spann}(\text{diagram}) = 2$

(2.) (Konsistenzprüfung) Alle alternierenden Knotendiagramme in der Tabelle haben minimale Kreuzungszahl.

(3.) Die Tait-Vermutung 3.5 ist wahr.

Lemma 2.7

Sei  $D$  ein zusammenhängendes Diagramm mit  $n$  Kreuzungen.

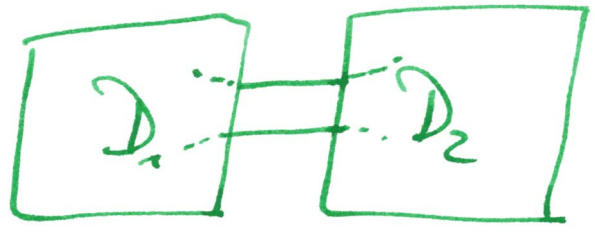
Ist  $D$  nicht-alternierend und „stark prim“, dann ist

$$|s_+ D| + |s_- D| < n + 2.$$

2.8

Def: Ein Diagramm  $D$  heißt prim,

falls in jeder Zerlegung



$D_1$  oder  $D_2$  ein Diagramm des Unknotens ist (nachdem wir die Enden geschlossen haben).

$D$  heißt stark prim, wenn in jeder solchen Zerlegung  $D_1$  oder  $D_2$  ein kreuzungsfreies Diagramm des Unknotens ist.

Bsp:



ist ein primales, aber nicht streng primales Diagramm.

# Beweis des Lemmas:

-70-

70 Induktion

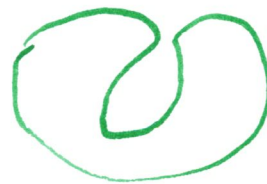
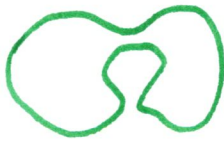
$n=2$  :



(einzige  
Möglichkeit)

$s_+$

$s_-$



$$\Rightarrow |s_+D| + |s_-D| = 2 < 2+2=4.$$

$n \geq 3$  und

$(n-1) \Rightarrow (n)$ .

$D$  ist nicht - alternierend, besitzt  
folglich zwei aufeinander - folgende  
Über - oder Unterkreuzung.

Sei  $c$  eine ~~ke~~ weitere, dritte  
Kreuzung.

$c$  kann mit einem pos. oder  
negativen Zustand aufgelöst werden.

Da  $D$  streng prim ist, erhält man  
in beiden Fällen ein zusammen-  
hängendes Diagramm.



Behauptung: Die LK der beiden Auflösungen  $-71-$   
~~besitzt~~ von  $c$  liefert ein <sup>zuhl.</sup> strenges  
 primes Diagramm  $D'$  mit  $(n-1)$   
 Kreuzungen.  $D'$  ist immer noch  
 nicht-alternierend.

Induktionsannahme:

$$|s_+ D'| + |s_- D'| < n + 1$$

Wie oben: ODDA erhält man  $D'$  aus  
 $D$  durch  $\oplus$ -Auflösung. Dann ist

~~Kreuz~~  $s_+ D = s_+ D'$

und  $s_- D' = s_1 D$ , wobei

$$s_1 = s_- \text{ außer an Kreuzg. } c.$$

$$\Rightarrow |s_- D| = |s_+ D| \pm 1$$

$$= |s_- D'| \pm 1$$

$$\Rightarrow |s_+ D| + |s_- D|$$

$$= |s_+ D'| + |s_- D'| \pm 1$$

$$< n + 1 \pm 1$$

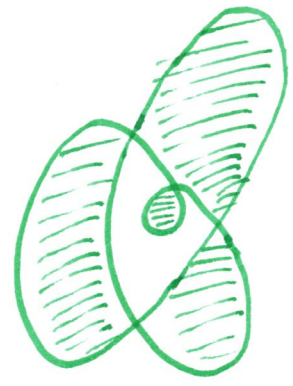
$$< n + 2$$

# Bleibt der Beweis der Behauptung:

Wir ordnen dem Komplement ~~der~~ der Proj. von  $D$  eine Schachbrettfärbung zu und erhalten einen Graphen  $\Gamma_D$  wie folgt:

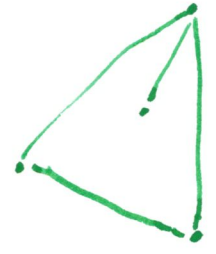


- Vertices: schwarze Flächen
- Kanten: <sup>die</sup> zwei schw. Flächen berühren sich an einer Kreuzung



## Übung:

Staske Primheit bedeutet: ~~Das~~ Wegnehmen eines Vertices erzeugt nicht mehrere Komponenten von  $\Gamma$  (wobei  $\Gamma$  als top. Raum aufgefasst wird)



Auflösung ~~der~~ Kreuzg.  $c$  <sup>einer</sup>  $\mathbb{R}^2$  <sub>(wenn Entfernung von Vertices hat man keinen Graphen mehr...)</sub> entspricht

- Entfernen einer Kante oder
- Zusammenziehen einer Kante zu einem Punkt

Übung: Frage der beiden Möglichkeiten steht Strenge Primheit ...



-73-

Aus den Lemmata 2.7 und 2.3 ergibt sich nun folgender Satz:

### Satz 2.9

Sei  $D$  ein zusammenhängendes  
ein. Verschlingung  $L$   
Verschlingungsdiagramm mit  $n$   
Kreuzungen, und sei  $D$  prim.  
Dann ist  
 $\text{spann}(V(L)) < n$ .

Beweis:

OBdA kann Primheit durch starke Primheit ersetzt werden. Dann weiter wie oben genannt.  $\square$

### Korollar 2.10

Es gibt nicht - alternierende  
Knoten. (z.B.  $\delta_{15}, \delta_{20}, \delta_{24}$ )

Beweis: Übungen.



### 3. Verwindungszahl und Kreuzungszahl

---

-74-

$$\mathcal{C}^2_{w=3}$$

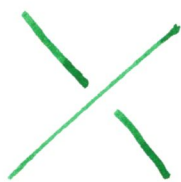
$$\mathcal{C}^2_{w=4}$$

Offenbar ist die Zahl  $w(D)$  einer Verschlingung  $L$  im Diagramm  $D$  abhängig von der Wahl des Diagramms. Wie ist es mit reduzierten Diagrammen? Man könnte phänomenologisch den Eindruck bekommen, dass es dort stimmt.

Frühe Knotentabulatoren glaubten dies ausdehnend.

-8-

Definition<sup>3.1</sup>: Sei  $D$  ein Versch.-Diagramm und  $r \in \mathbb{N}$ . Wir bezeichnen mit  $D^r$  das Diagramm, das wir erhalten, indem wir jede Komponente von  $D$  durch  $r$  parallel laufende Komponenten ersetzen, und wo das Kreuzungsverhalten wie folgt übernommen wird:



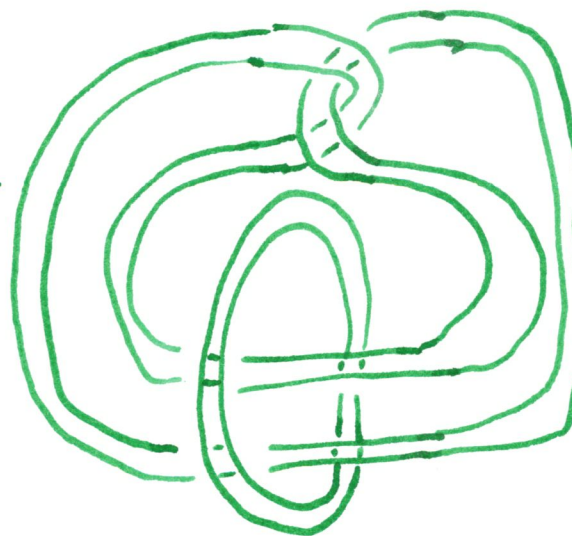
$\xrightarrow[r\text{-Kopie}]{}$



Bsp:



$\xrightarrow[2\text{-Kopie}]{}$

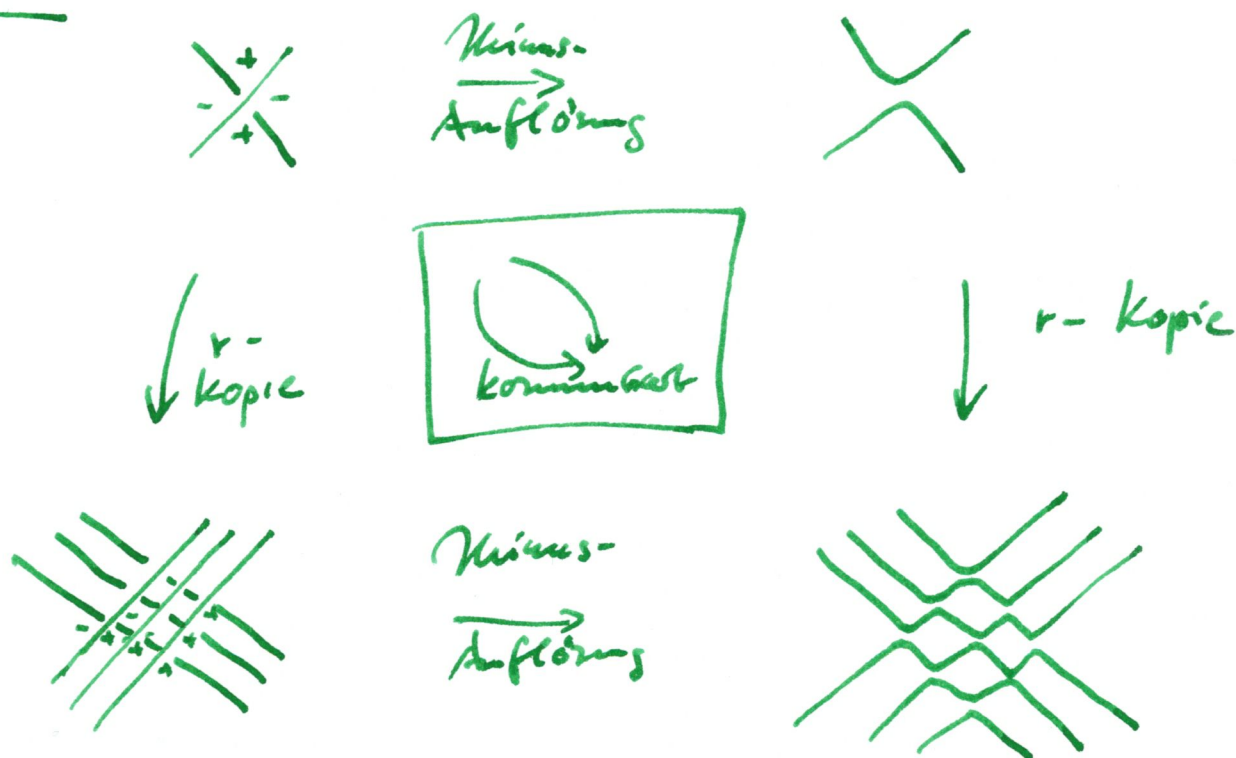


(und offensichtlich übertragen der Orientierung für orientierte Verschlingungen)

Lemma 3.2

Sei  $D$  plus-adäquat. Dann ist  $D^r$  plus-adäquat für alle  $r \in \mathbb{N}$ .  
 Entsprechend mit "minus".

Beweis:



Also:  $(s_- D)^r = s_-(D^r)$

Erinnerung: Ein Diagramm ist plus-adäquat, wenn man in der Plus-Auflösung entlang jeder Komponente jede elem. Kreuzung nur ein Mal besucht.

Also:  $D$  plus-adäquat  $\Rightarrow D^r$  plus-adäquat





### Satz 3.3

Seien  $D$  und  $E$  Diagramme der selben <sup>orientierten</sup> Verschlingung  $L$  mit  $n_D$  bzw.  $n_E$  Kreuzungen.

Ist  $D$  plus-adäquat, dann gilt  $n_D - w(D) \leq n_E - w(E)$ .

Beweis: Seien  $\{L_i\}$  die Komponenten von  $L$  und  $D_i$  bzw.  $E_i$  die entsprechenden Teildiagramme von  $D$  bzw.  $E$ .  
Seien  $\mu_i, \nu_i \in \mathbb{N}$ ,  
so dass  
 $w(D_i) + \mu_i = w(E_i) + \nu_i \quad \forall i$

Sei  $\underline{D}$  das Diagramm, das wir aus  $D$  erhalten, indem wir jeder Komponente  $D_i$   $\mu_i$  viele positive Schlaufen hinzufügen:



(ohne weitere Kreuzungen in  $\mathcal{D}^{-79}$  zu verursachen).

$\mathcal{D}$  ist immer noch plus-adequat:



Jetzt ist  $w(\underline{\mathcal{D}}_i) = w(\mathcal{D}_i) + r_i$ .

Folgsprechend erhält man  $E$ .

Dann:  $w(\underline{\mathcal{D}}_i) = w(\underline{E}_i)$ .

Man hat dann auch

$$w(\underline{\mathcal{D}}) = w(\underline{E}).$$

Die Kreuzungen von  $\underline{\mathcal{D}}_i$  mit  $\underline{\mathcal{D}}_j$  für  $i \neq j$  sind nämlich, mit Vorzeichen gezählt, gleich

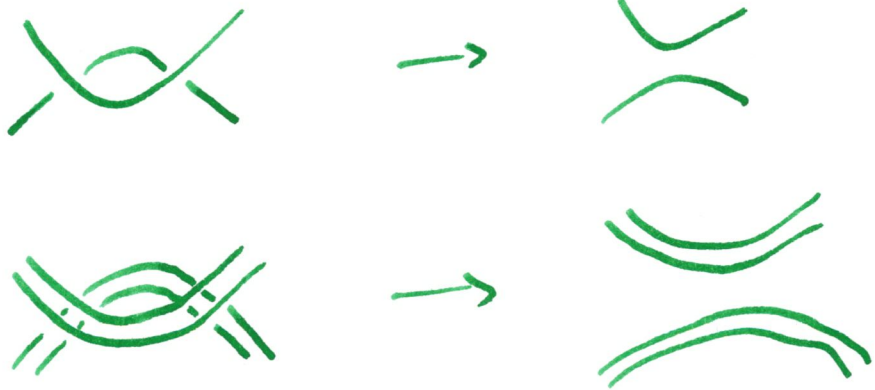
$2 \cdot \text{lk}(L_i, L_j)$ , was diagrammunabhängig ist.

Behauptung: Die  $r$ -Kopien von  $\underline{\mathcal{D}}$  und  $\underline{E}$  repräsentieren die selbe Verschlingung!

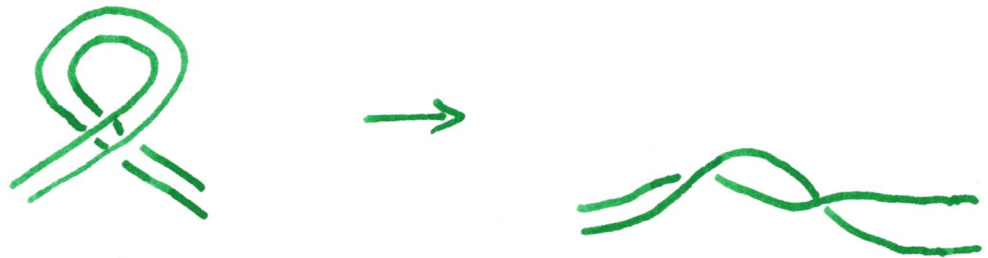
Zeweis hier von:

" $\tau$ -Kopie" ist offensichtlich  
invariant unter Reidemeister-II- und -III-Bewegung.

z.B.



Bei einer Reidemeister-1-Bewegung passiert folgendes:



~~Das ist ein Widerspruch~~

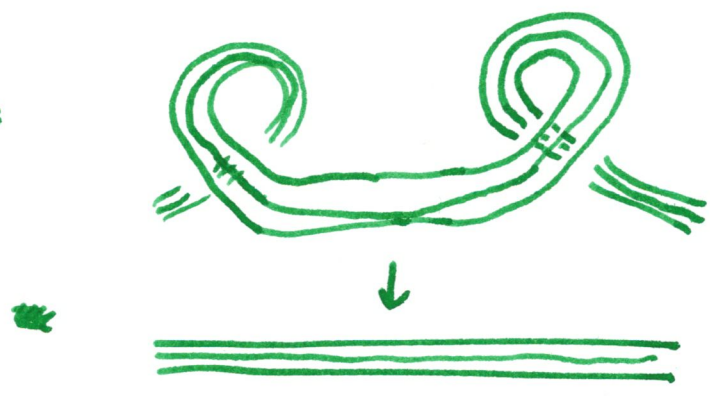




Allgemeiner sieht man, dass zwei  $r$ -Kopien ~~des~~ des selben Knotens  $K$ , aber aus unterschiedlichen Diagrammen  $D$  und  $D'$  angefertigt gleich sind, wenn  $w(D) = w(D')$ .

(Man kann die entsprechenden "Verdrrehungen", die man nach einer Sequenz von Reidemeister-Bewegungen erhält, alle an ein ~~bestimmtes~~ Stück ohne Kreuzungen von  $D$  schreiben und dort kann man dann auflösen, wenn  $w(D) = w(D')$  ist.

Skizze:



Sei  $\underline{L}^r$  die entstandene  $-82-$   
Verschlingung aus  $\underline{D}^r$  bzw.  $\underline{E}^r$ .

Mit

$$\begin{aligned} & V(\underline{L}^r) \Big|_{t=a}^{1/2} \\ &= (-a)^{-3w(\underline{D}^r)} \langle \underline{D}^r \rangle \\ &= (-a)^{-3w(\underline{E}^r)} \langle \underline{E}^r \rangle \end{aligned}$$

folgt also  $\langle \underline{D}^r \rangle = \langle \underline{E}^r \rangle$   
wegen  $w(\underline{D}^r) = w(\underline{E}^r)$ .

Nun ist

$$\begin{aligned} M \langle \underline{E}^r \rangle &\leq (n_E + \sum \nu_i) r^2 \\ &\quad + 2 (|s_+ E| + \sum \nu_i) \cdot r \\ &\quad - 2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} M \langle \underline{D}^r \rangle &= (n_D + \sum \mu_i) r^2 \\ &\quad + 2 (|s_+ D| + \sum \mu_i) \cdot r \\ &\quad - 2 \end{aligned}$$

Da dies für alle  $r$  stimmt, folgt

$$n_D + \sum \mu_i \leq n_E + \sum \nu_i$$

$$\Leftrightarrow n_D - \sum w(D_i) \leq n_E - \sum w(E_i)$$

$$\Leftrightarrow n_D - w(D) \leq n_E - w(E)$$

↑  
Wird  
Kreuzungen  
verschiedener  
Komponenten  
durch  
~~Verbindungen~~  
der Verbindungs-  
zahl bestimmt  
und.



Beob:

$$n_D - w(D) = \# \text{ neg. Kreuzg. in } D$$

Korollar 3.4

$D$  plus-adequat,  $E$

Die Anzahl der negativen Kreuzungen von  $D$  ist kleiner gleich der Anzahl neg. Kr. von  $E$ .

anderes  
Ding.  
der selben  
Verzah.



## Satz + Korollar 3.5

-84-

$D$  minus-adäquat und  $E$   
anderes Diagramm der selben Verschlingung.

Dann ist

$$n_D + w(D) \leq n_E + w(E).$$

Die Anzahl positiver Kreuzungen  
von  $D$  ist kleiner gleich der  
Anzahl von pos. Kr. von  $E$

Beweis:  $D$  minus-adäquat

$\Rightarrow \bar{D}$  plus-adäquat

$$w(\bar{D}) = -w(D) \quad \square$$

## Korollar 3.6.

Ein adäquates Diagramm hat  
minimale Kreuzungszahl.

## Korollar 3.7

Zwei adäquate Diagramme  
der selben Verschlingung haben  
gleiche Verwirrungszahl.

Insbesondere: Zwei reduzierte  
alternierende Diagramme der selben  
Verschl. haben gleiche Verwirrungszahl.