

IV. Seifert-Flächen und Knotenarithmetik

1. Einiges über Flächen

Def 1.0 Eine Fläche ist eine 2-dimensionale (glatte oder PL) Mannigfaltigkeit.

• "glatt" : Siehe Analysis II, III & Topologie von Stefan Friedl

• "PL" : besitzt eine simpliciale Struktur mit 0-, 1- und 2-Simplexen. Als top. Raum betrachtet hat jeder Punkt eine Umgebung, die homöomorph zu $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$

oder $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1 \text{ und } x_i \geq 0\}$
 $x = (x_1, x_2)$

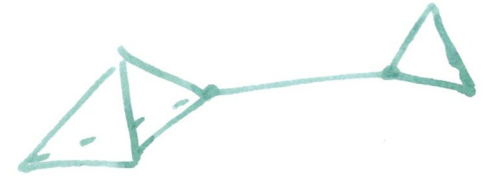
ist. (Dies ist natürlich nur an den Kanten und Vertices eine Bedingung.)

Bsp:

Oberfläche von:



Nicht:

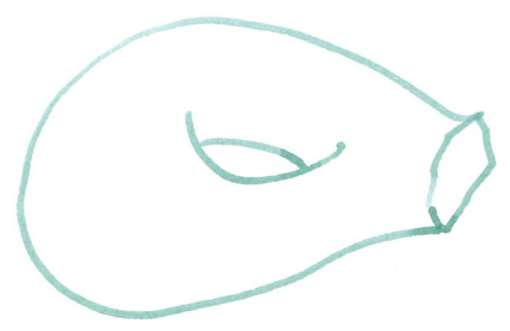


Auch nach Vereinbarung: \emptyset
(leere Menge)

Auch:



(ohne "Boden")
Rand



Satz 1.1 (ohne Beweis)

Die Euler-Charakteristik $\chi(\Sigma)$ einer Fläche Σ mit einer PL-Struktur aus endlich vielen Simplexen

$$\chi(\Sigma) = \# \text{ 0-Simplexe} \\ - \# \text{ 1-Simplexe} \\ + \# \text{ 2-Simplexe}$$

ist unabhängig von der simplizialen Struktur von Σ , sie hängt nur vom Homöomorphie-Typ von Σ ab.

Zusatz: Hat eine Fläche (oder höher-dim. PL-Mannigfaltigkeit) nur endlich viele Simplexe, ~~so ist~~ in einer PL-Struktur, so ist das auch für jede andere lokal endliche PL-Struktur der Fall (ohne Beweis)

Wir betrachten nur lokal
endliche PL-Strukturen.

Man kann auch zeigen, dass
eine PL-Mannigf., die lokal
endlich ist, kompakt ist genau
dann, wenn sie nur endlich
viele Simplexes besitzt.

Def. 2

Eine Fläche hat einen nicht-leeren
Rand, wenn es Punkte gibt,
die eine Umgebung homöomorph
zu $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1 \text{ und } x_1 \geq 0\}$

besitzen.

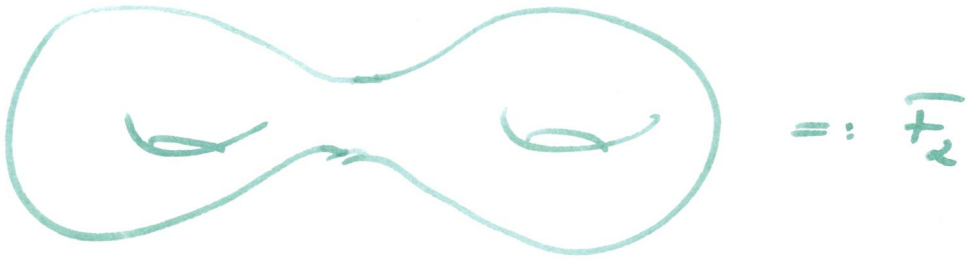
Eine kompakte Fläche ohne
Rand heißt geschlossen.

Beob: ~~Die~~ Die Rand-Komponenten
einer kompakten Fläche mit
Rand sind homöomorph zu S^1 .

Bsp:

$$\chi(S^2) = 2$$

$$\chi(T^2) = 0$$



Übung: $\chi(F_2) = -2$

$$F_2 = T^2 \# T^2$$

↑
zusätz. Summe

$$F_g = \underbrace{T^2 \# \dots \# T^2}_{g \text{ viele}}$$

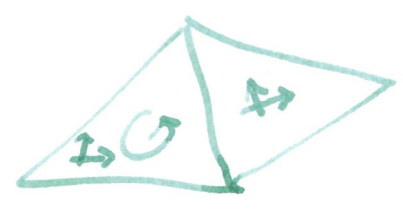
Übung: $\chi(F_g) = 2 - 2g$

Def 1.3 Eine Fläche heißt orientierbar, wenn sie keine Teilfläche homöomorph zum Möbiusband besitzt



→ Vorlesung:
 Jede Seite der 2-Simplizes schwarz / weiß färben
 kann man so dass sich diese beiden Seiten nicht trennen lassen
 man die Fläche diskontinuierlich fortsetzt
orientierbar

oder äquivalent, wenn 2-Simplizes konsistent kann.



mit Vertäglichkeit entlang Kanten.

Def 1.4 Das Geschlecht einer geschlossenen, orientierbaren, zusammenhängenden Fläche Σ ist definiert durch

$$g(\Sigma) := \frac{2 - \chi(\Sigma)}{2}$$

$\in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Def 1.5

Sei Σ eine kompakte, orientierbare Fläche mit Rand. Jeder Randkomponenten $\cong S^1$ kann man eine Scheibe $\cong D^2$ ankleben, so dass aus Σ eine geschlossene Fläche $\hat{\Sigma}$ entsteht.

$g(\Sigma) := g(\hat{\Sigma})$ heißt das Geschlecht von Σ .

Bsp: $g(\text{torus}) = 1$

$g(\text{disk}) = 0$

Übung: Sei Σ ^{orientiert, kompakt} eine Fläche mit s Randkomponenten. Dann ist

$$g(\Sigma) = \frac{2 - \chi(\Sigma) - s}{2}$$

6
Satz 1.8 (Klassifikation von geschlossenen orientierbaren Flächen)

Zwei ~~Flächen~~ orientierbare, geschlossene, zusammenhängende Flächen (mit Rand) sind genau dann homöomorph, wenn sie gleiches Geschlecht haben (und gleiche Anzahl der Randkomponenten).
 Dabei sind alle möglichen Geschlechter wie folgt gegeben:

Geschl. Fläche	S^2 ☺	T^2 ☹	$F_2 = T^2 \# T^2$ ☹☹
Euler-Ch. χ	2	0	-2
Geschlecht g	0	1	2

...	$\frac{T^2 \# \dots \# T^2}{g \text{ mal}}$...
...	$2 - 2g$	
...	g	

ohne Beweis!

2. Seifert-Flächen

Def 2.1: Eine eingebettete Fläche $\Sigma \subseteq S^3$, die kompakt, orientierbar und zusammenhängend ist, heißt Seifert-Fläche einer Verkümmung L , wenn der Rand von Σ durch L gegeben ist.

Bsp.:



ist keine Seifert-Fläche



ist Seifert-Fläche

von rechts.
Kleeblatt-Knoten

Def:

Sei ~~L~~ L eine Verschlingung
(oder ein Knoten). Dann ist

$$g(L) := \min \left\{ g(\Sigma) \mid \begin{array}{l} \Sigma \text{ ist Seifert-} \\ \text{Fläche von } L \end{array} \right\}$$

das Geschlecht von L .

Bsp: Der unknoten O hat
Geschlecht 0 .

$g(L)$ wohldefiniert?

Ja, wegen folg. Satz

Satz 2.2

(PL)-4

Jede Verschlingung L besitzt eine (PL-) Seifert-Fläche

Beweis: („Seifert-Algorithmus“).

Gebe L eine Orientierung und betrachte ein Diagramm $\in \mathbb{R}^2$ von L .

Löse alle Kreuzungen wie folgt auf:



Es entstehen ineinandergeschobene Kreise, die keine Kreuzung haben. Jeder berührt ^{genau} eine Scheibe. Durch sukzessives „Anheben“ der weiter innen liegenden Scheiben, erkennt man, dass diese sich nicht schneiden. („Parkhaus“)

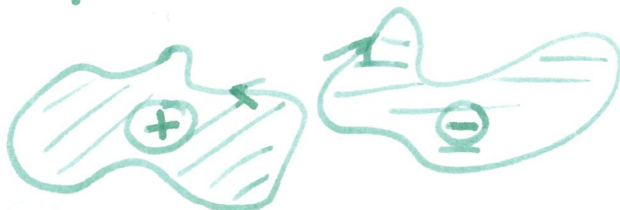
-97-

Man erhält die Verschiebung
 μ durch, wenn man nun an
 den ehemaligen Kreuzungspunkten
 "Stege" anklebt:



So entsteht ~~aus~~ aus dem obigen
 Schreiben eine Fläche, die L
 besandet.

Dass diese orientierbar ist, sieht
 man so: Wir sagen, eine der
 oben ~~gen~~ erhaltenen Schreiben ~~ist~~
 sehen wir von oben (+), wenn der
 orientierte Kreis die ~~Fläche~~ Schreibe einmal
 im math. positiven Sinne ~~durch~~ um-
 läuft und von unten (-)
 andernfalls:



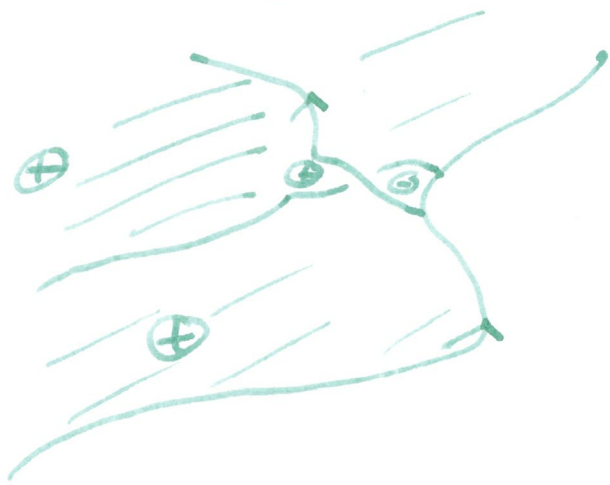
Wir müssen uns nun über-
zeugen, dass das Ankleben dieses
Stegs mit dieser Orientierungs-
konvention konsistent ist.

Fall 1:

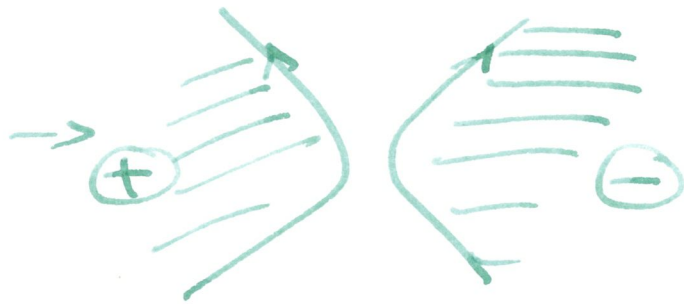
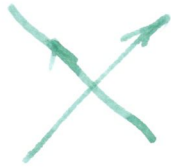


(in beiden Fällen
verläuft die Schweiß-
naht auf der gleichen Seite
des dargest. or.
Segments)

Von der Seite gesehen,
nach Ankleben des
Stegs:

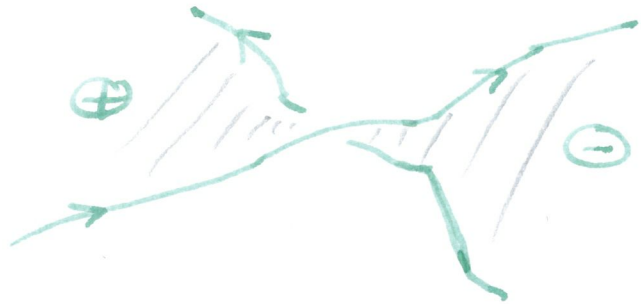


Fall 2:



(die Schraibe liegt auf unterschiedlichen Seiten der dazugeh. Segmente)

Dann ist Steg-Anklebung auch konsistent:



oder



Im Fall von Knoten ist die resultierende Fläche zsh. mit verbundene Komponenten mit interner Schraibe

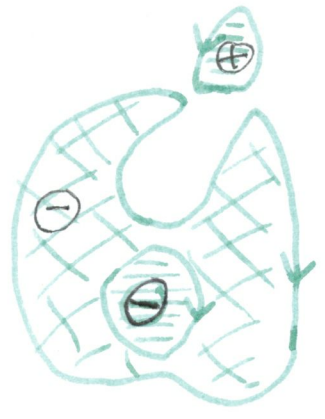
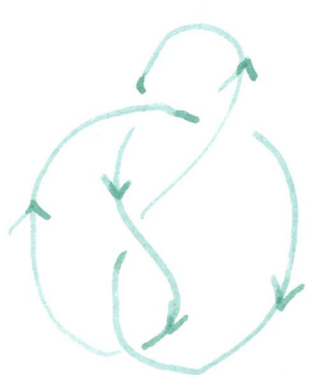


Prop. 3:
(Übung:) Ein Knoten K ist trivial genau dann, wenn $g(K) = 0$.

Bsp:

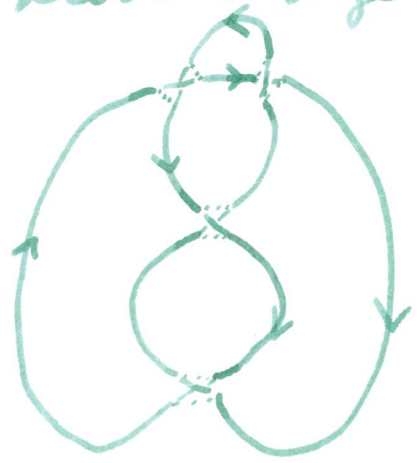
$g(3_1) = 1$
und weil $3_1 \neq 0$

(1.0.)



Jetzt $\chi = 3$
(3 Schichten)

↓
Klebe 4 Stege an



Jetzt $\chi = -1$

$\Rightarrow g(4_1) = 1$
und weil $4_1 \neq 0$

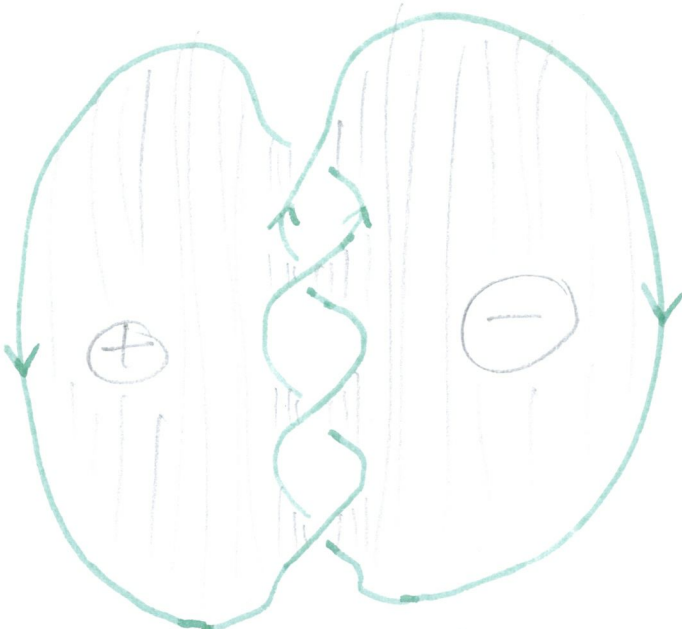
Übung: Die Kreise, die beim Seifert - Alg. entstehen, nennt man "Seifert - Kreise". Sei Σ eine k -komp. Verschlingung ^{mit Diagramm D} mit n vielden Kreuzungen, so dass s viele Seifert - Kreise entstehen.

Dann ist die resultierende Seifert - Fläche Σ Geschlecht

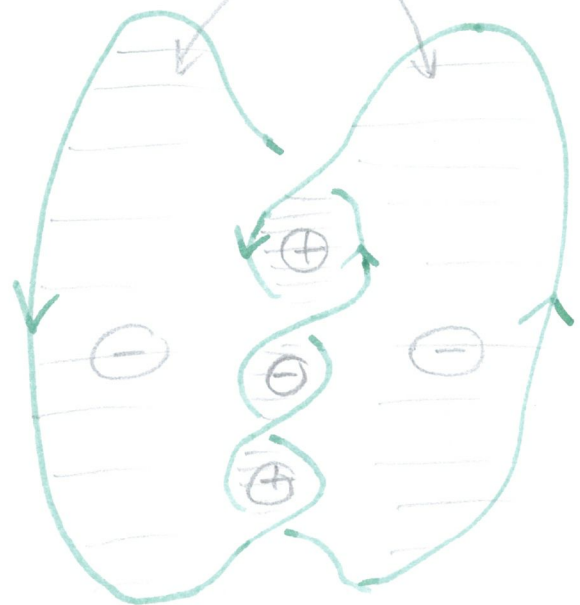
$$g(\Sigma) = \frac{2 - (s + k - n)}{2}$$

Bemerkung: Der Seifert - Alg. muss nicht eine Fläche von n sein. Geschlecht liefern.

gleiche Streife!



$$g(\Sigma) = 1$$



$$g(\Sigma) = 0$$

-102-

Also: Die Toms-Verdickung
 $T(2,4)$ hat Geschlecht 0.

Diese ist nicht-trivial, also
verdr. von $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q}$ (Jones-
Polynom!). Also gilt nicht
ein Analogon obiger Prop. 2.3
für Verdickungen.

3. Addition von Knoten

Def 3.1:

$$\text{Sei } \mathcal{B}^3 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y, z)\| \leq 1 \right\}$$

$$\text{und } S = \left\{ (x, y, z) \in \mathcal{B}^3 \mid \begin{array}{l} x=0, \\ y=0 \end{array} \right\} \subseteq \mathcal{B}^3$$



S ist offenbar eine 1-dimensionale Teilmenge (1-dim'ler Polygonzug, ~~1-dim'ler Unterraum~~) von \mathcal{B}^3 .

Wir nennen (\mathcal{B}, S) das triviale Ball-Strang-Paar.

Serien K_1, K_2 ^{orientierte} Knoten
 in S^3 , die wir uns in zwei
 verschiedenen Kopien $S^3_{(1)}, S^3_{(2)}$
 vorstellen. Wir entfernen aus
 $S^3_{(i)}$ einen Ball $B_{(i)}$ für
 $i=1,2$, so dass die beiden
 resultierenden Paare

$$(B_{(i)}, B_{(i)} \cap K_i), i=1,2$$

homöomorph zum trivialen
 Ball-Strang-Paar sind.

Wir verkleben die ^{beiden} Komplemente
 mittels eines Homöomorphismus
 des Randes, der so gewählt
 sei, dass sich die beiden
 orientierten Stränge wieder zu
 einem orientierten Knoten zu-
 sammensetzen, wobei jeder Strang

seine ursprüngliche Orientierung beibehält. Den resultierenden Knoten nennen wir $K_1 + K_2$.

Man kann ~~das~~ zeigen, dass dies wohldefiniert ist (bis auf Äquivalenz.)

Beweis-Skizze dazu:

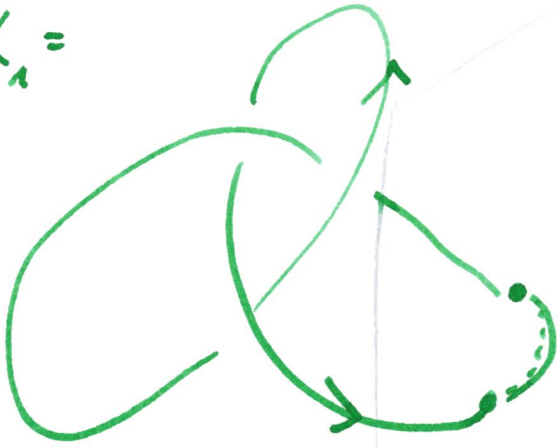
• Dass $S^3_{(ii)} \setminus B_{(ii)}$ jeweils homöomorph zu einem Ball ist, ist Aussage des Satzes von Schönflies („Jede in S^3 eingebettete S^2 teilt S^3 in zwei Komplemente, die beide homöomorph zu einem Ball sind“)

• Je zwei orientierungshaltende (orientierungsumkehrende) Homöomorphismen von S^2 sind isotop, liefern also homöomorphe Verklebungen, und die result. Knoten sind isotop.

$\partial(S^3_{(ii)} \setminus B_{(ii)}) \cong S^2$

Visualisierung:

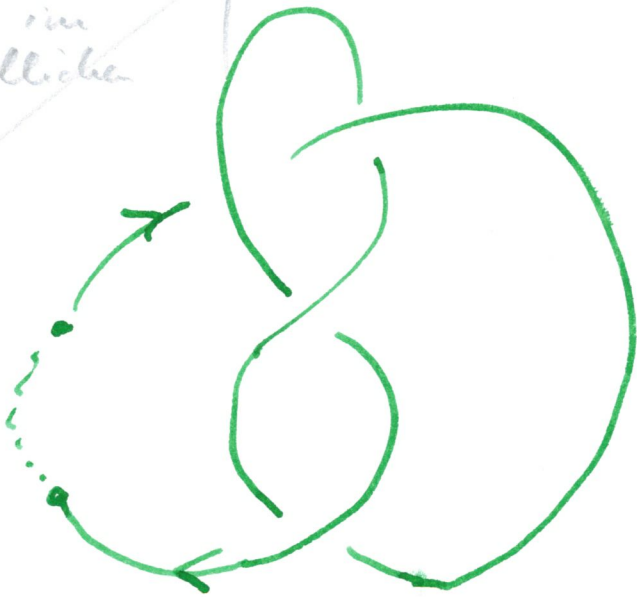
$K_1 =$



Ball

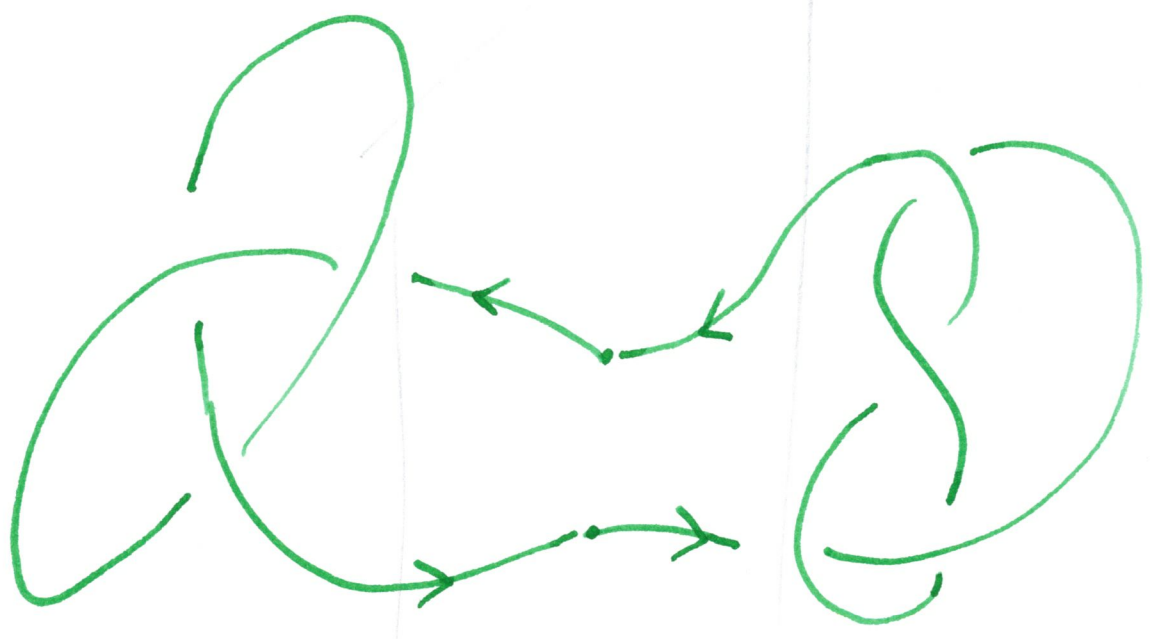
Ball

↑
 $\cong S^2$ mit
Punkt im
Unendlichen



$= K_2$

=>



$K_1 + K_2$

Bemerkungen:

- Die Orientierungen kann man i. A. nicht ignorieren, weil es Knoten gibt, die nicht umkehrbar sind. Es kann dann sein, dass $K_1 + (-K_2) \neq K_1 + K_2$.
- Sei U der Linkknoten.
Dann ist $K + U$ äquivalent zu K , also $K + U = K$.

Frage: 3.2

U ist also neutral bzgl. Addition.

Gibt es additive Inverse?

D.h. gibt es ^{nicht-triv.} Knoten K ,
so dass ein Knoten L existiert
mit $K + L = U$?

Satz 3.3

Seien K, L zwei Knoten.

Dann ist $g(K+L) = g(K) + g(L)$.

Korollar 3.4

Die Antwort auf obige Frage 3.2 lautet "Nein".

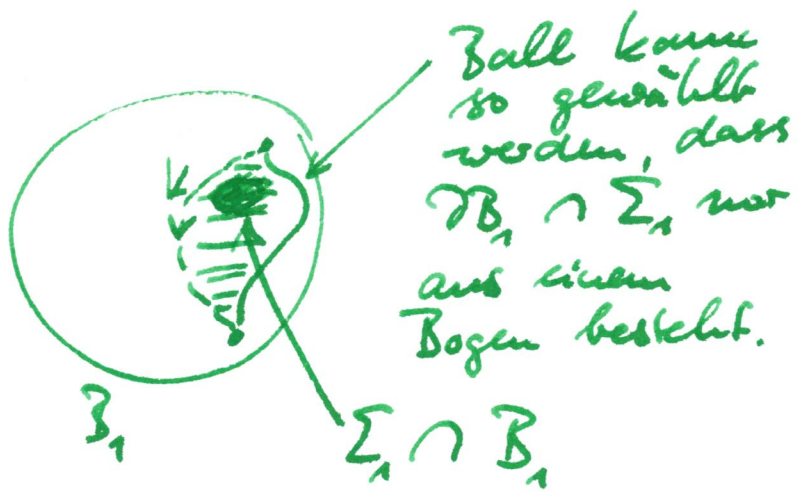
Satz: K, L orientierte Knoten.

Dann ist

$$g(K + L) = g(K) + g(L).$$

Beweis:

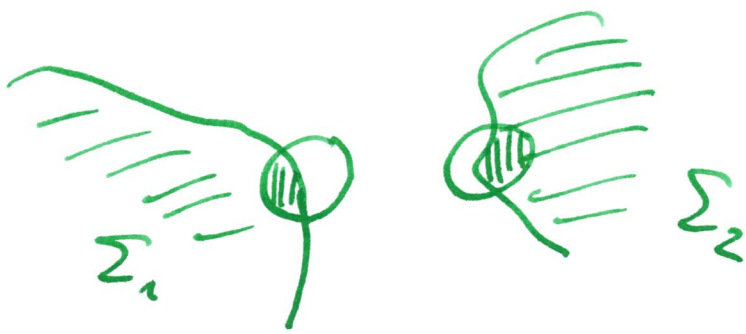
Seien Σ_1 und Σ_2 ^{Seiten-}Flächen von K ~~und~~ ^{bzw.} L von minimalem Geschlecht.



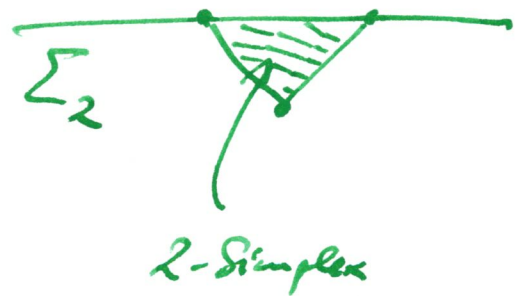
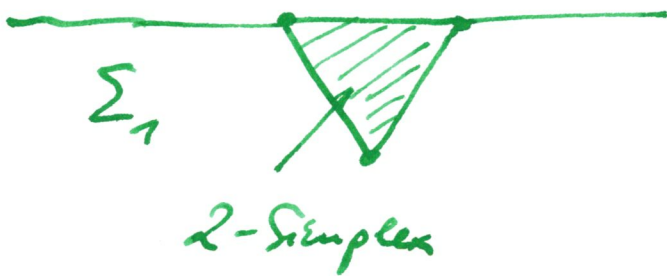
Genauso: Σ_2 :

~~Satz~~ Man kann die Verklebung so durchführen, dass $\Sigma_1 \cap B_1$ mit $\Sigma_2 \cap B_2$ verklebt wird. Es entsteht so wieder eine orientierte Fläche, Σ .

Übung: $g(\Sigma) = g(\Sigma_1) + g(\Sigma_2)$



Schematische:



Man sieht: $\chi(\Sigma)$

$$= \chi(\Sigma_1) + \chi(\Sigma_2) - 1$$

$$\Rightarrow g(\Sigma) = \frac{2 - \chi(\hat{\Sigma})}{2}$$

$$= \frac{2 - \chi(\Sigma) - 1}{2}$$

$$= \frac{2 - \chi(\Sigma_1) - \chi(\Sigma_2) + 1 - 1}{2}$$

$$= \frac{2 - (\chi(\hat{\Sigma}_1) - 1) - (\chi(\hat{\Sigma}_2) - 1)}{2}$$

$$= g(\Sigma_1) + g(\Sigma_2).$$

-112-

Also: $g(K+L) \leq g(K) + g(L)$.

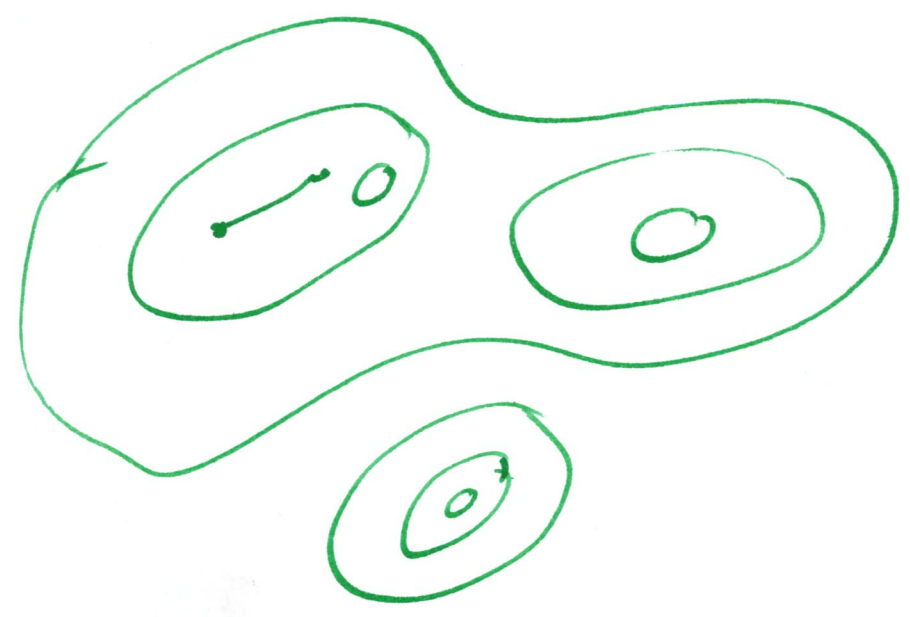
Sei nun Σ eine Seifert-Fläche von min. Geschlecht für $K+L$.

Sei $S^2 \hookrightarrow S^3$ eine eingebettete 2-Sphäre, die die Summe $K+L$ induziert, d.h. die $K+L$ in zwei Punkten schneidet, so dass auf den jeweiligen Seiten K bzw. L entsteht. ~~aus dem ein~~

Man kann annehmen, dass sich S^2 in allgemeiner Lage zu Σ befindet, d.h. sämtliche ^{Durch-}Schnitte sind transversal.

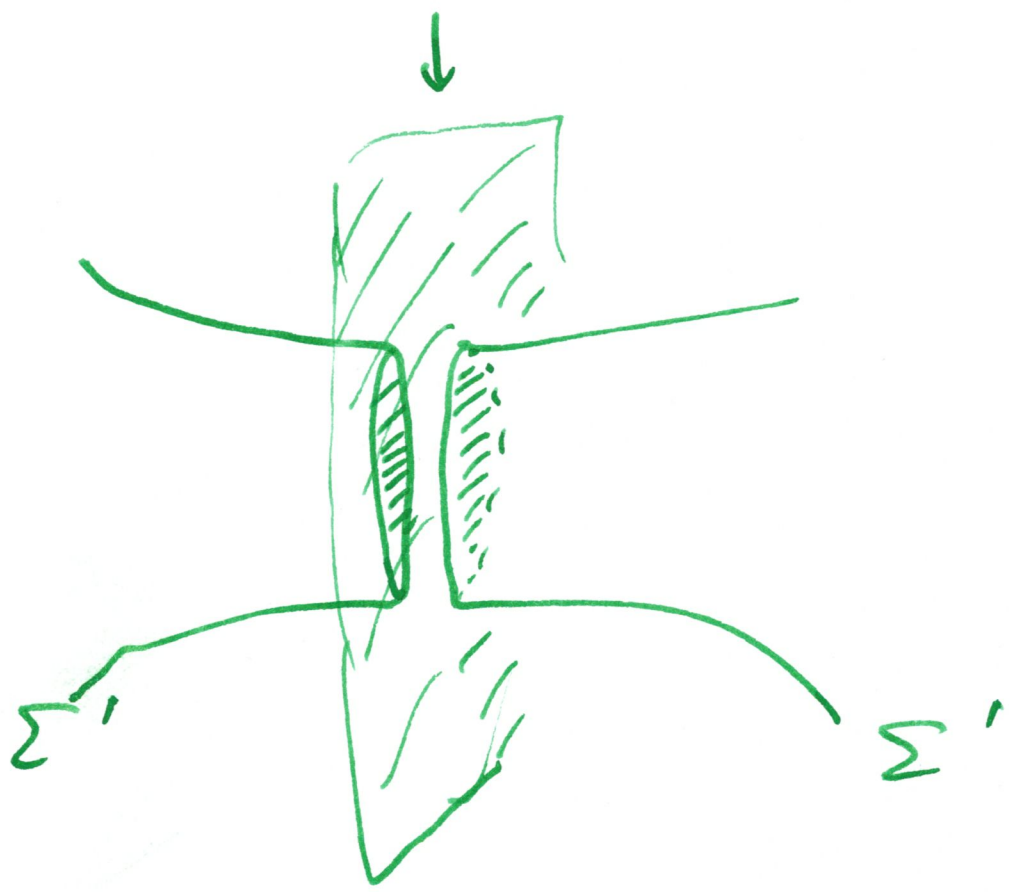
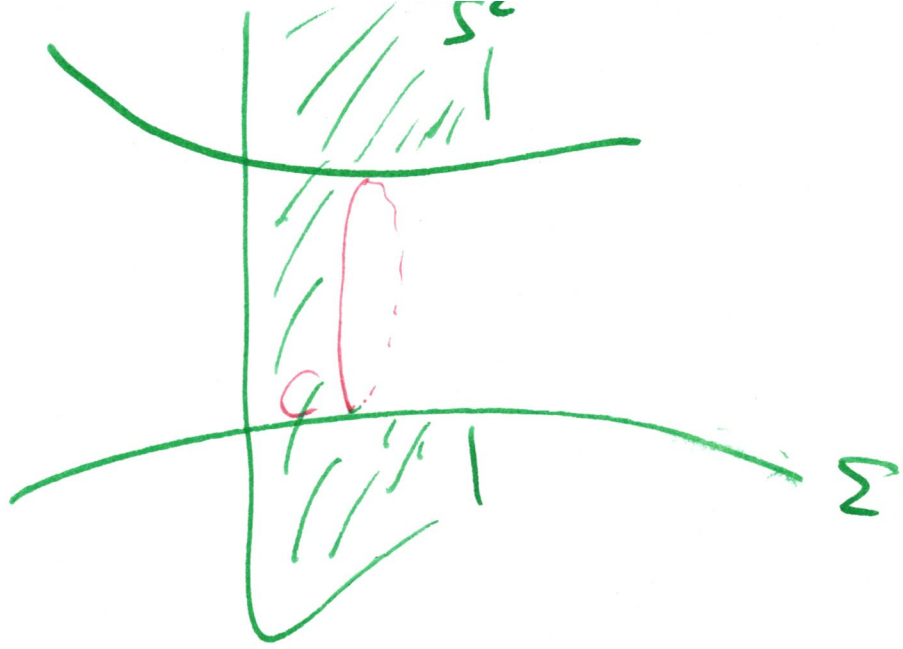


Der Durchschnitt $S^2 \cap \Sigma$ ist
 also auf S^2 beschrieben durch
 einen Bogen zwischen den Schnitt-
 punkten ~~von~~ $K+L \cap S^2$
 (homöomorph zu $[0,1]$) und endlich
 vielen S^1 en:



Diese Kreise sind i. A. geschadetelt.
 Ein Kreis C heißt innest, wenn
 es in S^2 eine Scherbe brandet,
 die Σ nicht schneidet.

Wir können dann zu einer
~~Scherbe~~ Fläche Σ' wie folgt ~~gelangen~~
 gelangen:



D.h. wir entfernen C von Σ ,
ziehen Σ ein wenig von der
Fläche weg und füllen die beiden
entstandenen Randkomponenten mit
Scheiben.

Wenn nun Σ' eine zusammenhängende Fläche wäre, dann hätten wir die Euler-Charakteristik um 2 erhöht, also $g(\Sigma') = g(\Sigma) - 1$ im Widerspruch zur behaupteten Minimalität des Geschlechts von Σ .

Also ist Σ' nicht mehr zusammenhängend und besteht aus einer geschlossenen Komponente sowie einer Seifert-Fläche. Wir entfernen die geschlossene Komponente und erhalten eine neue Seifert-Fläche Σ'' , die einen Schnittkreis w von S^2 enthält.

Induktion \Rightarrow Erhalte Seifert-Fläche Σ''' mit nur noch Bogen $(\cong [0,1])$ als Schnittmenge ~~mit~~ mit S^2 . Diese liefert dann Seifert-Flächen

Σ_1''' und Σ_2''' für K bzw. L .

$$g(k+l) = g(l)$$

$$\text{Wieder: } \rightarrow g(\Sigma''') = g(\Sigma_1''') + g(\Sigma_2''') \\ \geq g(k) + g(l).$$

wegen voraus-
gesetzter Mini-
malität



Korollar 3.5

Für $n \neq m$ ist

$$\underbrace{k + k + \dots + k}_{n \text{ mal}} \neq \underbrace{k + \dots + k}_{m \text{ mal}}.$$

~~Korollar 3.6~~

Definition 3.6.

Ein Knoten k heißt prim,
falls aus $k = k_1 + k_2$ folgt,
dass entweder k_1 oder k_2 der
Leerknoten ist.

Korollar 3.7

Ein Knoten von Geschlecht 1
ist prim.

Korollar 3.8

Jeder Knoten ist Summe von Primknoten.

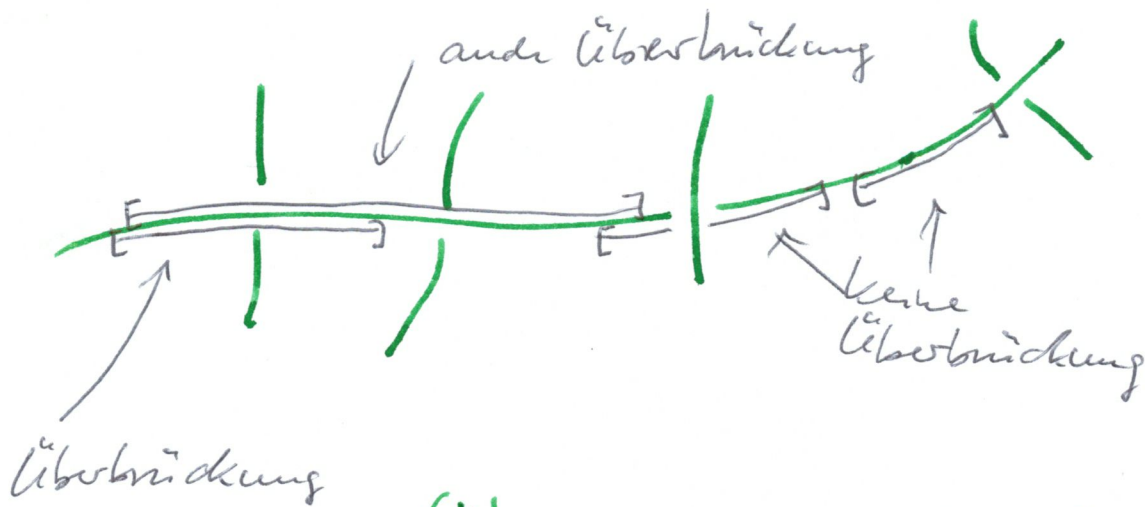
Beweis: Ist ein Knoten k nicht prim, so ist er darstellbar als Summe von Knoten $k_1 + k_2$ mit $g(k_1), g(k_2) < g(k)$.

Weiter mit Induktion über Geschlecht. Da die Geschlechter nach unten durch 1 beschränkt sind, bricht der Prozess nach endlich vielen Schritten ab. □

4. Brückenanzahl & Verworfenheit

Sei D ein Diagramm eines Knotens K . Ein zusammenhängendes Segment s ($\equiv [0,1]$) von D heißt eine Überbrückung, wenn s keine ^{vielf.} Überkreuzung enthält, allerdings keine Unterkreuzung.

Bsp:



Eine maximale (*) Überbrückung in D heißt Brücke. Die Anzahl der maximalen Überbrückungen heißt Brückenanzahl von D , geschrieben $b(D)$.

(*) maximal bezüglich
Verlängerung des Segments,
nicht bezüglich Anzahl der
Überkreuzungen

Def 4.1:

$$b(K) := \min \{ b(D) \mid D \text{ ist Diagramm von } K \}$$

$$b(\text{Unknoten}) := 1$$

Bsp.:



||



← hat 2 Brücken

$$\Rightarrow b(3_1) \leq 2$$

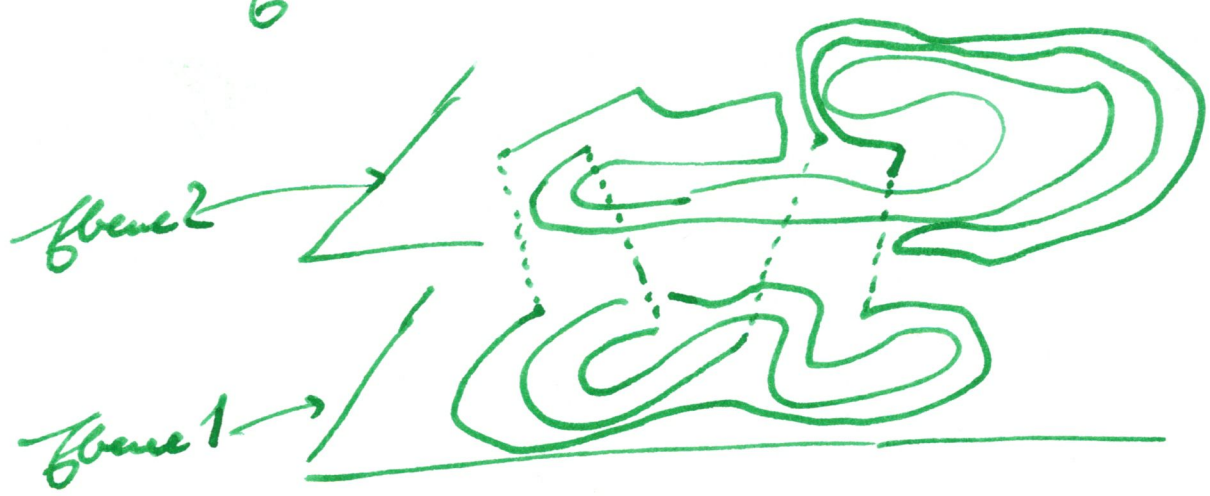
Übung: Für Knoten mit Brückenzahl 1 ist der Unknoten

$$\Rightarrow b(3_1) = 2$$

Übung: $b(4_1) = 2$
↑
Adatsknoten.

Übung: Ein 2-Brücken-Knoten ist prim.

Hinweis: Man kann einen 2-Brücken-Knoten so darstellen, dass er, bis auf 4 gerade Verbindungsstücke, in zwei parallelen Ebenen verläuft.



Wie schneidet eine $\delta^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, die $K = K_1 + K_2$ induziert, eine solche Darstellung?
↑
2-Brücken-Knoten

Prop 4.2

Es gilt $b(K+L)$
 $= b(K) + b(L) - 1.$

Ohne Beweis (siehe [Sikubert, 1954,
Math. Zeitschrift,
"Über eine numerische
Kodierungsvariante"])

Wir zeigen nur
 $b(K+L) \leq b(K) + b(L) - 1.$

Sei nun $k : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 ein Knoten und $v \in \mathbb{R}^3$ mit
 $\|v\|=1$. Sei

$$\mu_v(k)$$

die Anzahl der relativen
 Maxima der Funktion

$$S^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto v \cdot k(t)$$

↑ Skalar-Produkt,

falls diese Zahl endlich ist.

[Mit ähnlichen Überlegungen wie oben,
 wo wir reguläre Projektionen
 eines Knotens untersucht hatten,
 kann man zeigen, dass diese
 Zahl endlich ist für alle
 $v \in S^2$, { endl. Vereinigung von
 Großkreisen }]

Def 4.3 $\mu(k) := \min_{v \in S^2} \{ \mu_v(k) \}$

heißt Vorwurfszahl von k .

Prop 4.8

Man hat $\mu(k) = b(k)$.

Beweis:

für $k: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$v \mapsto \mu_v(k)$

ist lokal konstant im
 größten Definitionsbereich
 dieser Funktion (d.h. $\forall v_0 \in S^2$,
 wo $\mu_{v_0}(k) < \infty$ ist, gibt es
 eine offene Umgebung $U(v_0) \subseteq S^2$,
 so dass ~~$\mu_v(k) < \infty$~~ $\mu_v(k) < \infty$
 für alle $v \in U(v_0)$, und es
 ist $\mu_v(k) = \mu_{v_0}(k) \quad \forall v \in U(v_0)$.)

Für solche $v \in S^2$, die einer
 regulären Projektion von k
 entsprechen, ist

$$\mu_v(k) = b(D(k, v))$$

↑
 Diagramm
 von k verisl.
 Projektion v .



Seien nun $v \in S^2$ und $k: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ in seiner

Äquivalenzklasse so gewählt, dass

$[k] := K$

Vorsicht: (*) Beweis lückenhaft hier.

$\mu_0(k) = \mu(K)$ ist.

Wird später korrigiert.

Man "stört" nun $v \in S^2$ ein wenig, so dass $D(k, v)$ ein reguläres Diagramm ist. Dann ist

Def. von $b(k)$.

$\mu(K) \stackrel{(*)}{=} b(D(k, v)) \geq b(K)$

wegen der lokalen Konstanz (s.o.)

bleibt noch $\mu(K) \leq b(K)$ zu zeigen.

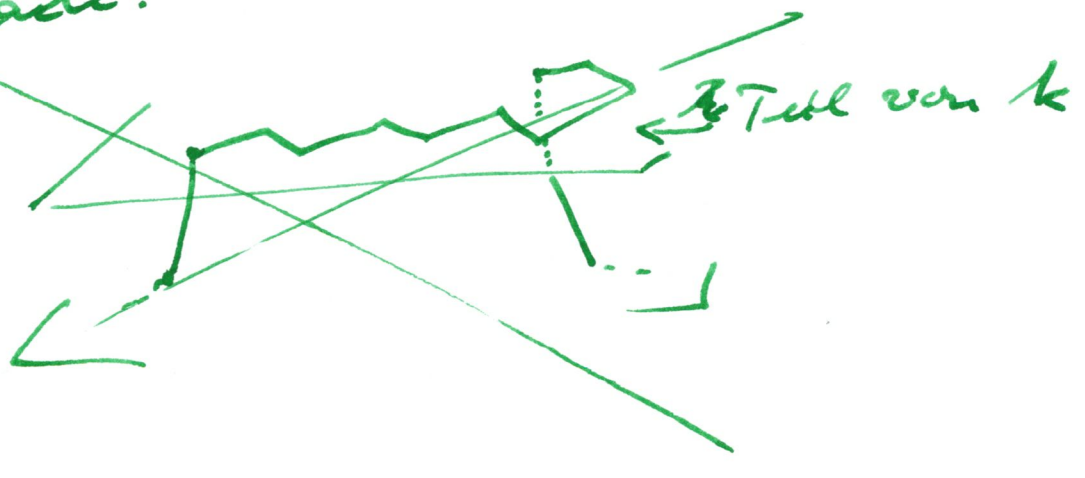
Sei dazu D ein Diagramm von K mit $b(K)$ Brücken. Wie oben kann man annehmen, dass der Knoten K realisiert wird durch einen geschl. Polygonzug $k: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

der auf zwei parallelen Ebenen verläuft, abgesehen von $2b(K)$ Geradenbrücken, die Bögen der oberen

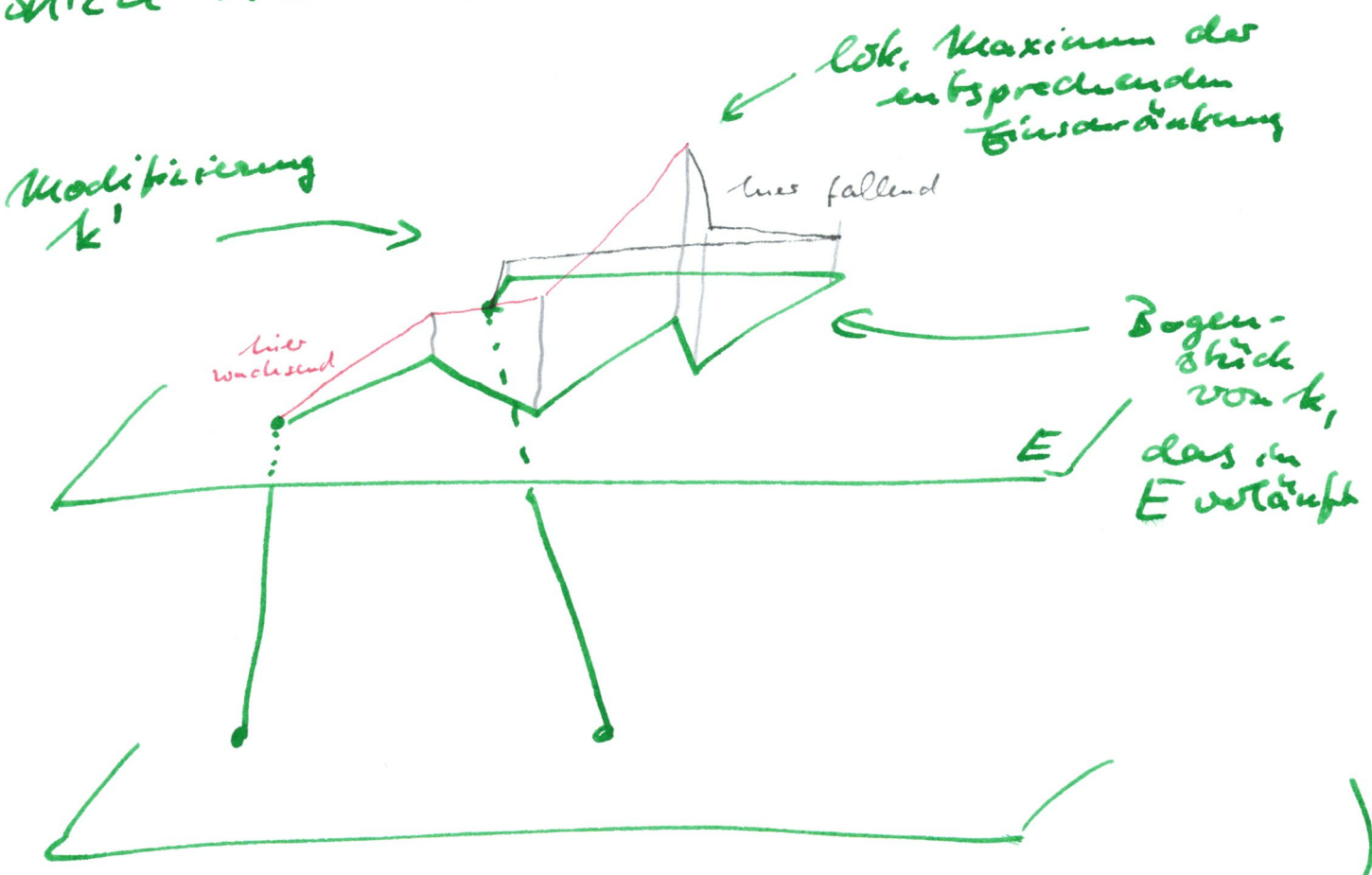
Ebene mit Bögen der unteren K_1 -
 Ebene verbinden. Jedes der
 $b(k)$ vielen Bogenstücke, das
 in der oberen Ebene verläuft,
 kann man nun so an-
 heben, dass dieses Bogenstück
 genau ein lok. Maximum für

~~$f(k)$~~ ~~$g(k)$~~ $S^1 \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto k'(t) \cdot v$

liefert, wobei v orthogonal ~~auf~~
~~der~~ ^{zur} oberen Ebene ~~steht~~ und von
 der unteren wegzeigt, ~~Also ist~~
~~die~~ und k' durch die ~~Werte~~
 "Anhebung in der Mitte" jedes
 oberen Bogenstückes aus k resultiert.
 (Skizze dazu:



(Skizze dazu:



Offenbar ist

$$u(k) \leq u_0(k') = b(k).$$

Also ist $u(k) = b(k).$



Übung: Es gibt unendlich viele
 Knoten von Brückenzahl 2. -127-



$$a_i \in \mathbb{Z}$$

sei gegeben durch

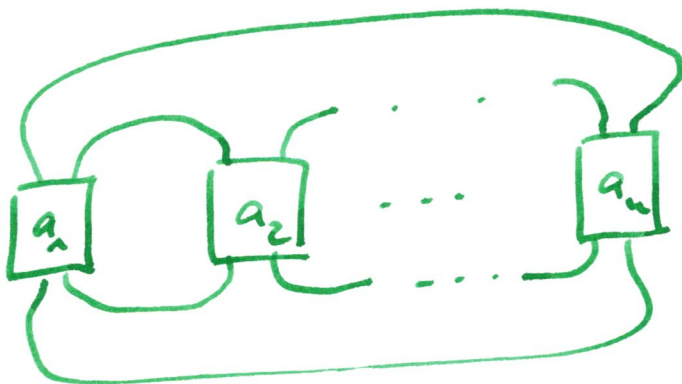


a_i ~~mal~~ Kreuzungen
 für $a_i \geq 0$



$|a_i|$ Kreuzungen
 für $a_i < 0$

Dann heißt



~~Das~~ $P(a_1, \dots, a_n)$ die Bretzel-Kerschlingung
 vom Typ (a_1, \dots, a_n) .

Übung: • Invarianz unter zyklischer
Vertauschung von
(a_1, \dots, a_n).

- Kriterium, wann dies ein Knoten, wann eine Verschlingung ist?
- $P(p, q, r)$ ~~mit p, q, r~~
paarweise
koprim.

mit $p, q, r \neq 0$.

Dann hat $P(p, q, r)$
Brückenanzahl ≤ 2 , falls
eine der Zahlen $|p|, |q|, |r|$
gleich 1 ist.

5. Satelliten- und ihre Begleit-⁻¹²⁹⁻ knoten

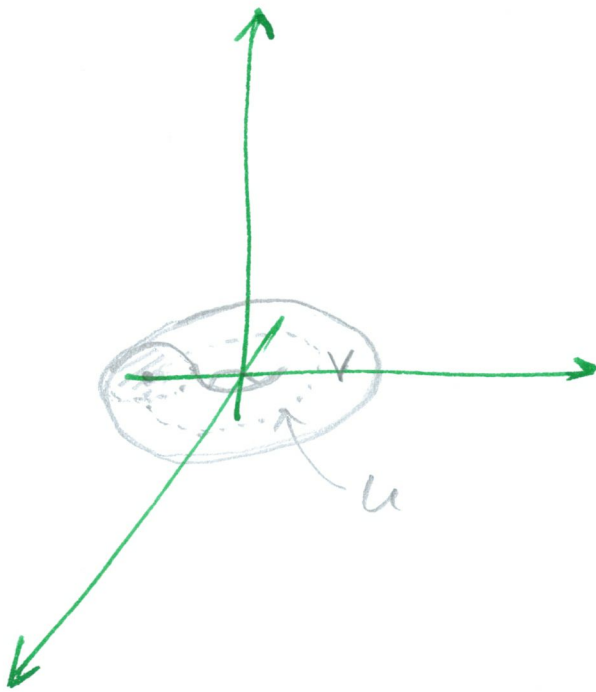
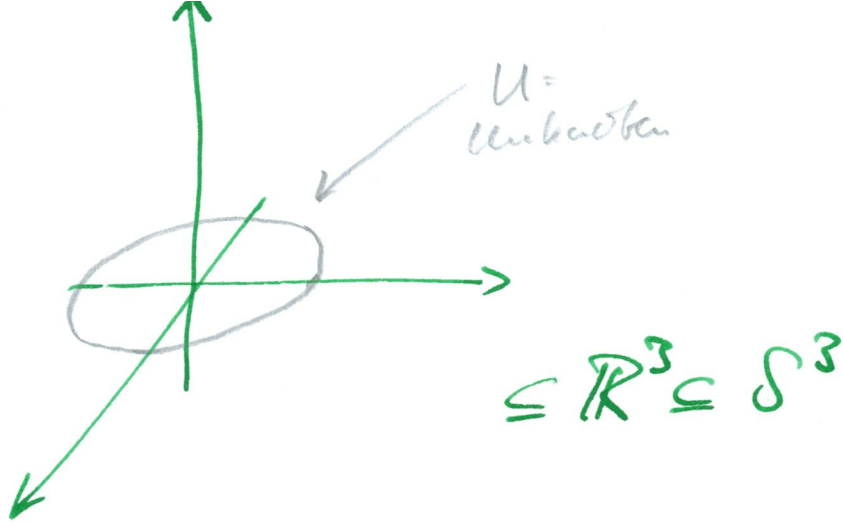
Def 5.1 $\underline{D^2} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$

Sei $h: S^1 \times D^2 \longrightarrow S^3$
ein Homöomorphismus auf ~~das~~ sein
Bild. Wir nennen $V := S^1 \times D^2$ einen
Volltorus (warum?). Wir sagen,
dass das Bild $h(V)$ ein ver-
knotteter Volltorus ist, wenn

$$h|_{S^1 \times \{0\}}$$

die Seele $S^1 \times \{0\}$ (homöomorph
zu S^1) auf einen nichttrivialen
Knoten abbildet.

~~Angabe~~ unverknotete
Es gibt eine Standard-Einbettung
von V in S^3 nämlich als
"reguläre Umgebung" eines Unknotens:



150
 (*) Wir fordern ein langes
 Loch mit für Knoten, und
 die Verallg. in Verdgl. sind
 sind zumeist teilweise möglich.

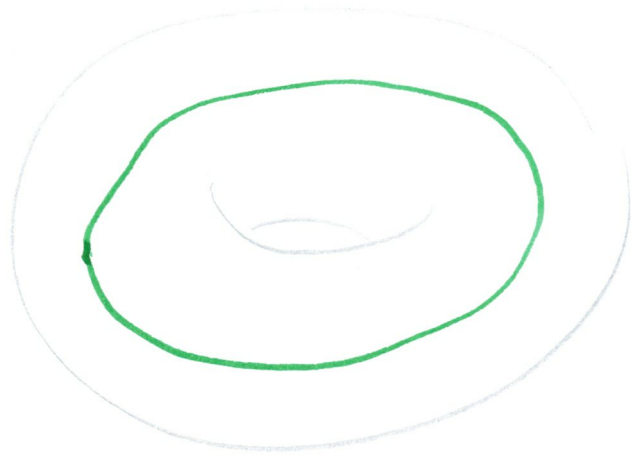
(oder eine ^(*) Verdringung)

Wir sagen, dass ein Knoten k
nicht-trivial im (Standard-) Voll-
torus liegt, wenn k in
 V liegt, aber nicht in irgendeinem
 Ball $B^3 \subseteq V$ enthalten ist, und
 auch nicht innerhalb V isotop
 zur Seele des Volltoreses ist,
 andernfalls trivial.

Beispiele:



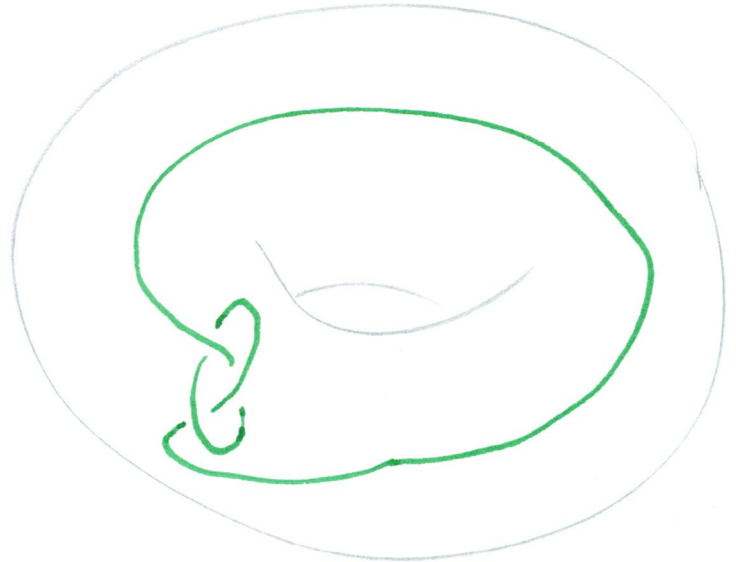
nicht
nicht-trivial
(trivial)



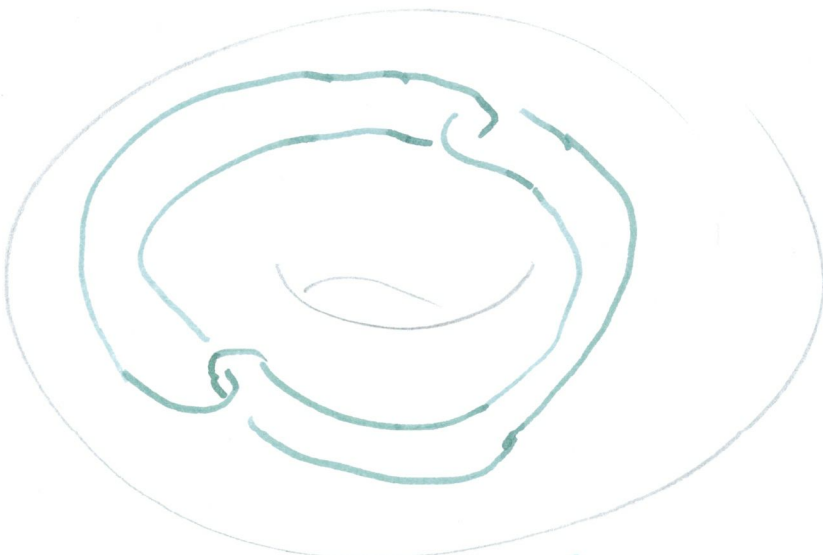
trivial



nicht-trivial



nicht-trivial



nicht-trivial

Def 5.2

Eine Scheibe $D (\cong D^2)$ heißt Meridianscheibe von V , falls $D \subseteq V$, $\partial D \subseteq \partial V$ und die Randkurve ∂D spaltet ∂V nicht in 2 Komponenten.

Bsp: Jede $\{pt\} \times D^2 \subseteq S^1 \times D^2$ ist eine Meridianscheibe.

~~Def~~
Bedingung: Ein Knoten $k \in V$ ist genau dann nicht-trivial eingebettet, wenn er nicht Seele von V ist und jede Meridianscheibe D von V schneidet.

Def 5.3

mid-trivial

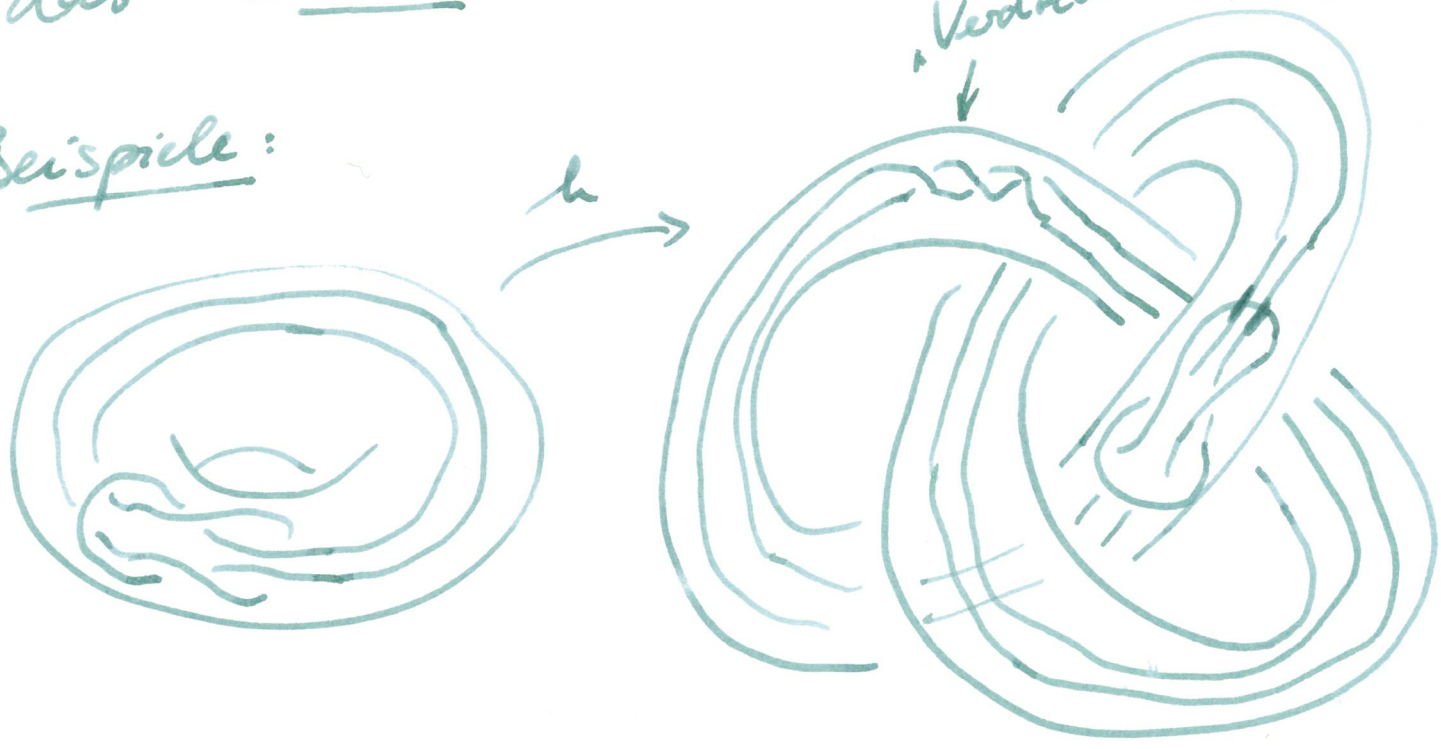
Sei $K \subseteq V = S^1 \times D^2$ ein Knoten in einem Volltorus, und sei $h: V \rightarrow S^3$ ein Homöomorphismus auf das Bild $h(V)$. Wir nennen $K := h(K) \subseteq S^3$ einen

Satellitenknoten zum Begleitknoten

$H = h|_{S^1 \times \{0\}}$. Das Paar (V, K) heißt das Schema von ~~K~~ K.

"Verdrückungen" sind möglich.

Beispiele:



Begleitknoten: Kleeblattknoten.

5.4

Def: Ein Knoten mit Schema



und Begleitknoten K heißt
Whitehead-Verdoppelung von K .

Zum Beispiel sind



$= 3_1$



$= 4_1$

und



Whitehead-
Verdoppelungen
des Linkknotens.




$= 6_1$

Def 5.5

Sei K ein Knoten ~~in einem~~ und Seele eines Volltorus V . Ist $K' \subseteq V$ ~~ebenfalls~~ ein weiterer Knoten, der in V isotop zu K ist, und so dass

$$lk(K, K') = 0 \quad \text{ist,}$$

so nennt man K' eine Longitudale von K . Man kann zeigen, dass jeder Knoten Seele eines Volltorus ist.

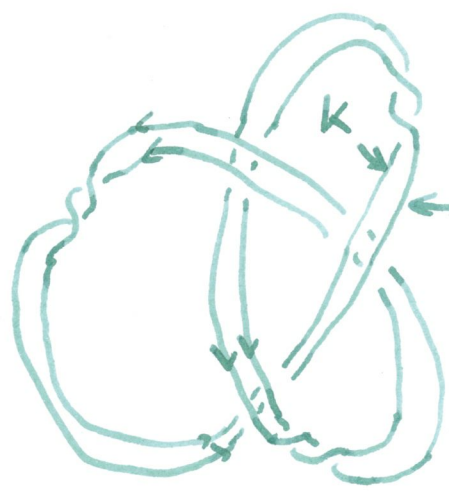
( Vorsicht, in manchen Lehrbüchern wird die Bedingung an die Verschlingungszahlen nicht gestellt.)

Def 5.6 Man nennt einen Homöomorphismus

$$h: S^1 \times D^2 \longrightarrow S^3$$

treu oder longitudalentreu, falls h eine Longitudale ~~der Seele~~ der Seele Standard-Einbettung $S^1 \times D^2 \subseteq S^3$ wieder auf eine Longitudale der Seele von $h(S^1 \times D^2)$ abbildet.

Bsp:



Langitnde K'
von K .

Man spricht von einer ungetwirlten
Whitehead - Verdopplung $Wh(K)$ eines Knotens
 K , wenn $Wh(K)$ als Satellit
mit Begleiter K unter einem
truen Homöomorphismus $h: S^1 \times D^2 \rightarrow S^3$
hervorgehen.

5.7

Def: Sei k der (p, q) -Torusknoten
im ~~Volltorus~~ unverschlungenen Standard-
Volltorus $S^1 \times D^2 \subseteq S^3$.

Für Satellit ~~von K~~ mit Begleit-
knoten K unter einer truen Abb.
 $h: S^1 \times D^2 \rightarrow S^3$ heißt (p, q) -K-
kabelung von K .

Wir können uns nun fragen,
 ob ein Satellitenknoten mit
 nicht-trivialem Begleitknoten
 "einfacher" ~~als~~ als sein Begleitknoten
 sein kann, und insbesondere, ob
 dieser trivial sein kann.

Sei $k \in S^1 \times D^2$ ein nicht-
 trivialer ^{eingebetteter} Knoten in einem Vollraum,
 $h: V \rightarrow S^3$ ein Homöomorphismus.

Wir sagen, dass der Satellitenknoten
 $K = h(k)$ Ordnung α bezüglich V
~~des Begleitknotens $\# = h|_{S^1 \times \{0\}}$~~
 hat, wenn jede Meridiansschneide
 $D \subseteq S^1 \times D^2$ in mindestens α
 vielen Punkten abgeschnitten schneidet,
 und wenn es eine Meridiansschneide
 D gibt mit $|D \cap k| = \alpha$.

Bsp: Jede Whitehead-Verdopplung
 eines Knotens K hat
 Ordnung 2 bezüglich des Begleitknotens
 K .

Def 5.8

Sei $K \subseteq S^3$ ein Knoten.
 Eine Familie von Volltori
 $V_1, \dots, V_n \subseteq S^3$ (möglicherweise
 verknüpft) heißt bezüglich K
nebengeordnet, wenn jeder
 dieser Volltori K enthält (so
 dass K ein Satellitenknoten bezi-
 glich der Seelen L_1, \dots, L_n der
 Volltori ist) und so dass jeder der
 Volltori die abgeschlos-
 senen Komplemente der
 übrigen Volltori
 im Inneren enthält.

5.9

Satz (Sambet, 1954)

Sei K Satellitenknoten der
 Ordnung $\alpha \geq 1$ bezüglich ~~der~~
~~Begleiter~~ L_1, \dots, L_n , die Seelen
 einer Familie von Volltori $V_1, \dots,$
 V_n , die bezüglich K neben-
 geordnet sind. Dann ist

$$\alpha \cdot \sum_{i=1}^n (b(L_i) - 1) + \alpha \leq b(K),$$

wobei L_1, \dots, L_n die Seelen der Volltori
 V_1, \dots, V_n sind.

Korollar 5.10

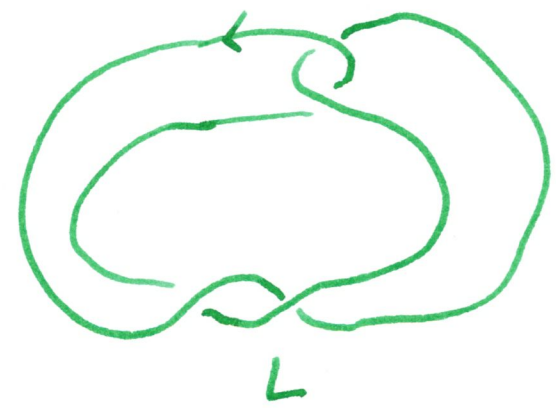
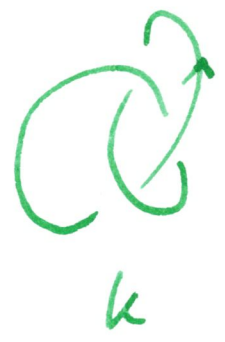
Seien K und L zwei Knoten in S^3 . Dann ist

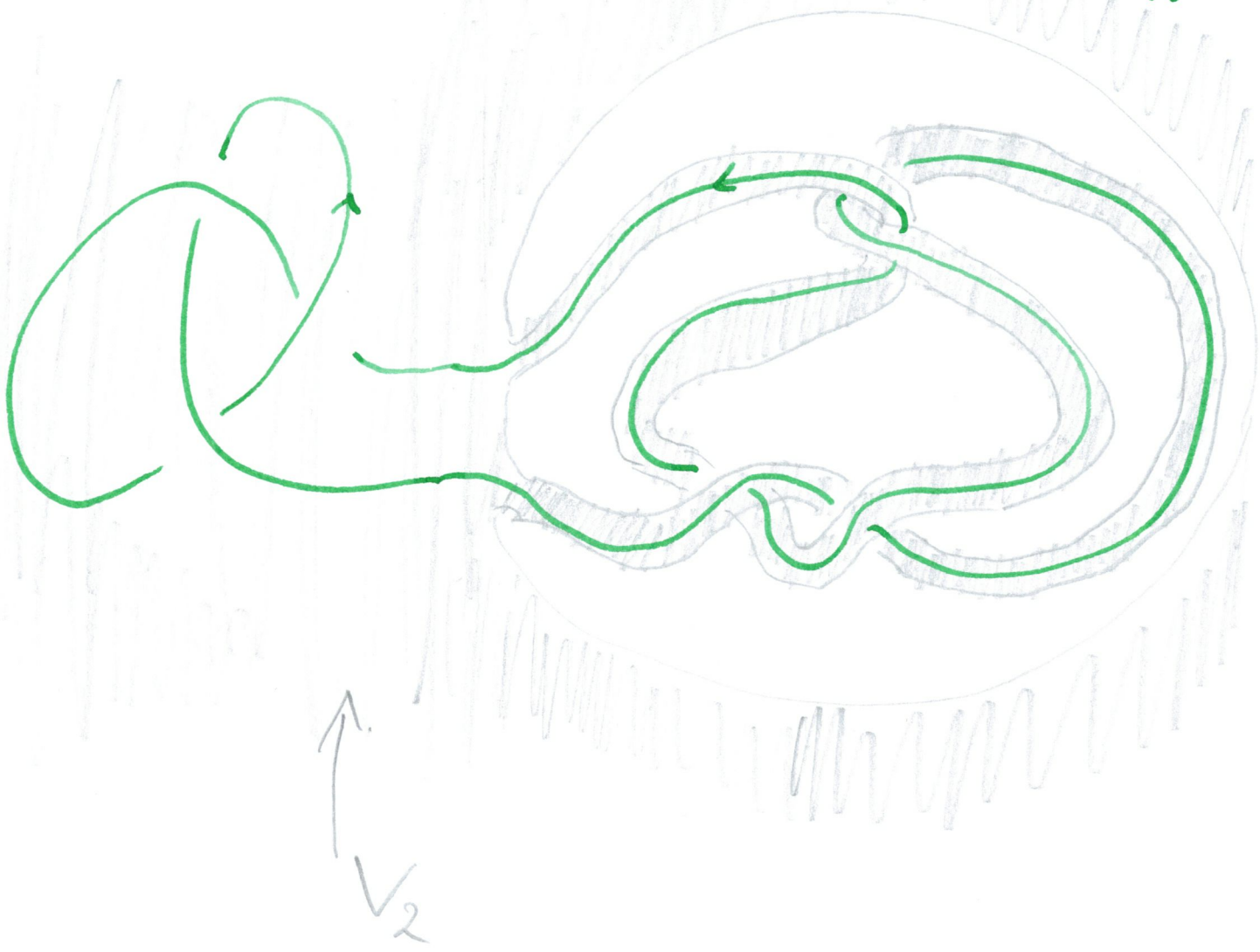
$$b(K+L) = b(K) + b(L) - 1.$$

Beweis: Skizze:



Ein Ball B_1





V_1 ist gegeben als Vereinigung eines Balles B_1 , der L bis auf ein triviales Ball-Strang-Paar enthält, sowie eines

$$[0,1] \times D^2$$

das mit den beiden Enden an B_1 angeklebt ist, und so dass $[0,1] \times D^2$ eine Umgebung von K ist, bis auf ein triviales Ball-Strang-Paar.

V_1 " folgt K und schließt L ".

V_2 sei nun das Komplement eines kleineren ^{offenen} Balles $B'_1 \subseteq B_1$, der L immer noch enthält, + vereinigt mit einem $[0,1] \times D^2$, der " L folgt " :

-142-

Das Komplement $S^3 \setminus \mathbb{D}_1^0$
ist dabei wieder ein Ball
(Satz von Stöuflies). V_2 "folgt L
und schließt K".

Man sieht, dass sowohl V_1
als auch V_2 Volltori sind,
und dass sie bezüglich $K+L$
nebeneinander sind. Die
Seite von V_1 ist K , die von V_2
ist L . $K+L$ hat bezüglich
beider Volltori Ordnung 1.

Mit Satz 5.9 ergibt sich:

$$(b(K) - 1) + (b(L) - 1) + 1 \\ \leq b(K+L).$$

$$\Leftrightarrow b(K) + b(L) - 1 \leq b(K+L).$$

Die umgekehrte Ungleichung hatten
wir schon gesehen.



-143-

11

Korollar 5.9

Ist H ein Begleitknoten von K mit Ordnung $\alpha \geq 1$, ^{bez. $V \geq H$} so ist $\alpha \cdot b(H) \leq b(K)$.

und $b(H) < b(K)$.

Beweis: Ist $\alpha \geq 2$ folgt dies direkt aus Satz 5.9, angewendet auf nur einen Vollknoten mit Seele H , der K enthält. Dann ist offenbar auch $b(H) < b(K)$.

Hat K die Ordnung 1 bezüglich V , dann ist $K = H + L$ für einen nicht-trivialen Knoten L (sofern K nicht-trivial ist) und K nicht Seele von V ist). Man argumentiert nun mit Korollar 5.10.

Korollar 5.12

Sei K Satellitenknoten ~~zum~~
zum Begleiter $H \subseteq V$. Dann
kann K bezüglich V höchstens
Ordnung $\frac{b(K)}{2}$ haben.

Korollar 5.13

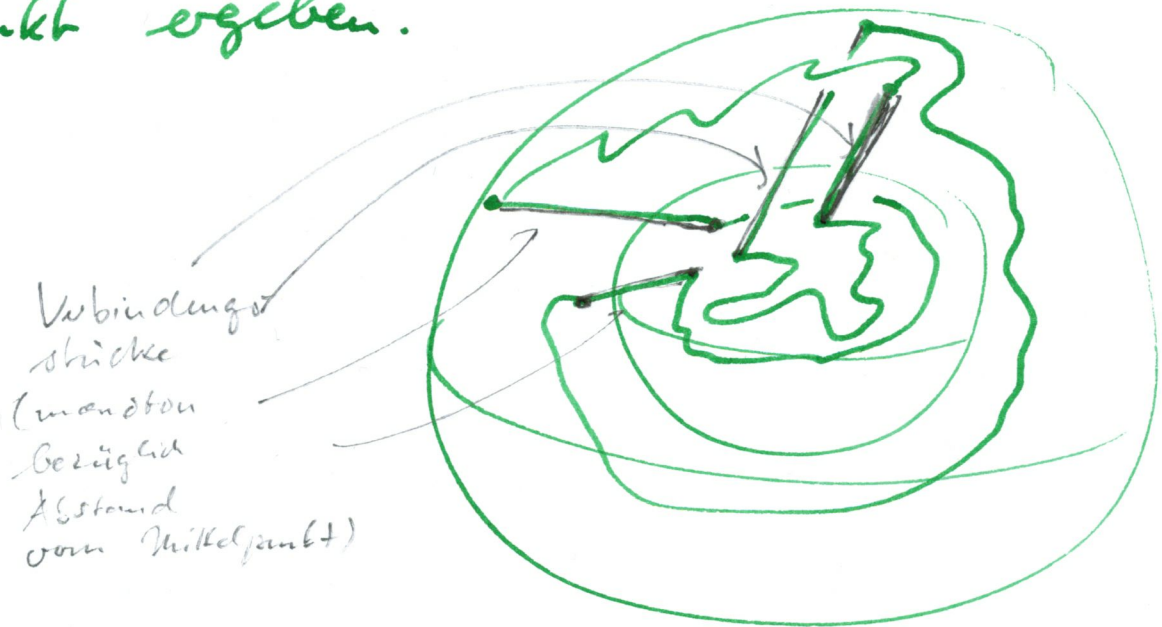
Ein Knoten K mit Brückenanzahl
 2 besitzt keinen Begleitknoten,
d.h. ergibt sich nicht mit einer
Satellitenkonstruktion (so dass
das Schema ~~(K, V)~~ $K \hookrightarrow V$ nicht-trivial
eingebettet ist und die Seele von V
ein nicht-triviale Knoten ist).

Korollar 5.14

Eine Whitehead-Verdrehung
 $Wh(K)$ (getwistet oder nicht)
~~hat~~ eines ^{nicht-trivial} Knotens K besitzt
Brückenanzahl $b(Wh(K)) = 2 \cdot b(K)$.

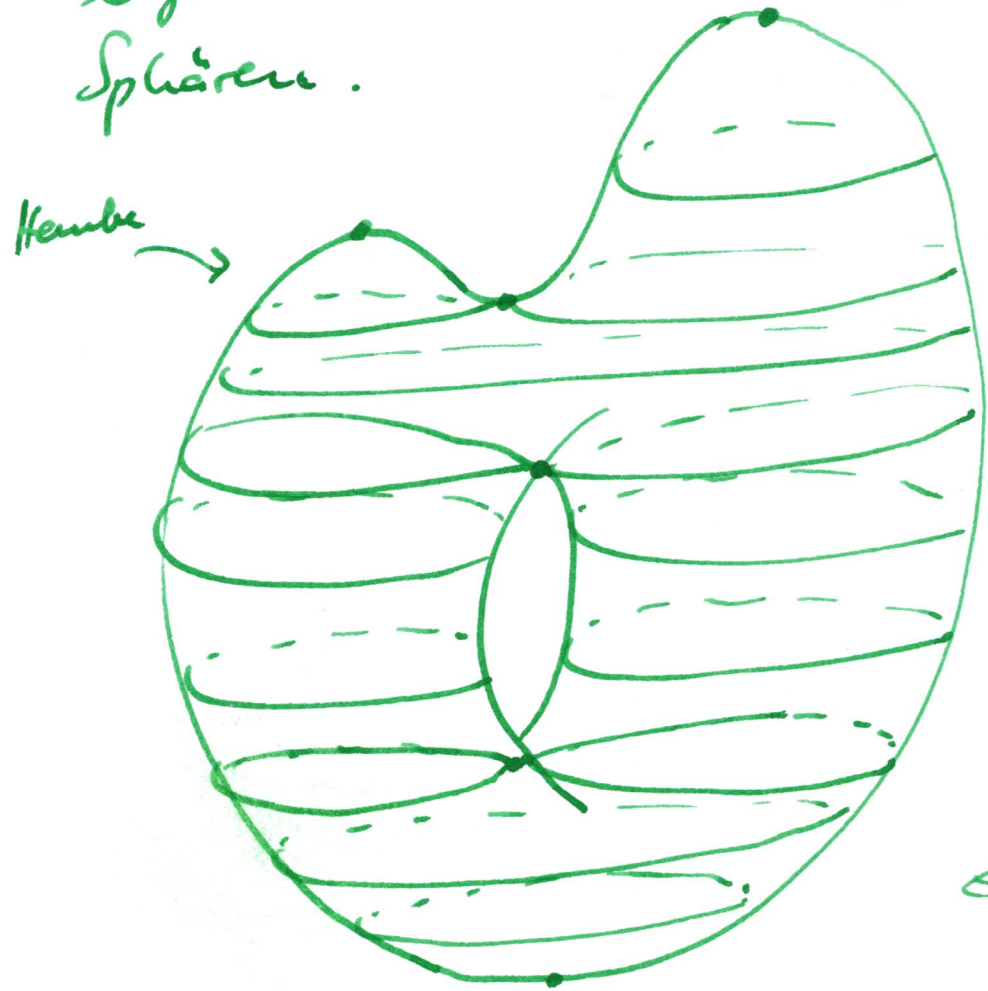
Vorbereitungen zum Beweis des Satzes 5.9.

Ausfallt Brückendarstellungen
bezüglich ^{paralleler} Ebenen zu betrachten,
können wir dies auch bezüglich
Sphären tun, die sich als Ränder
von Bällen mit dem selben Mittel-
punkt ergeben.



Sambot: „Brücken-
darstellung
zweiter Art“
(äquivalent zu erster Art)

Wie kann ein in S^3 eingebetteter
Torus von einer Schar von
parallelen Ebenen geschnitten
werden? Für „allgemeinen Schnitt“
ergibt eine Vereinigung von 1-dim'l
Sphären.



Hier:
3 Aus-
nahmepunkte,
3 lokale
Min/Max

← Knicke

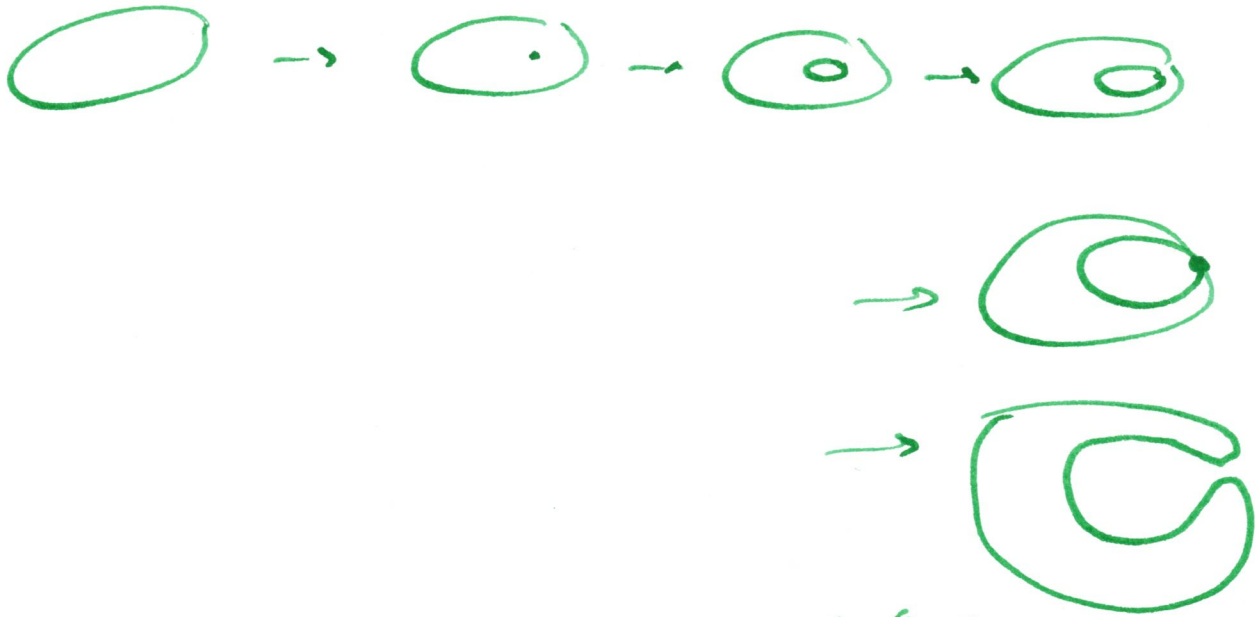
Kann auch
auftreten:

„Einstülpung“



äquivalent
zur Knicke,
wenn
Schnitt
mit
2-Sphären
betrachtet
werden

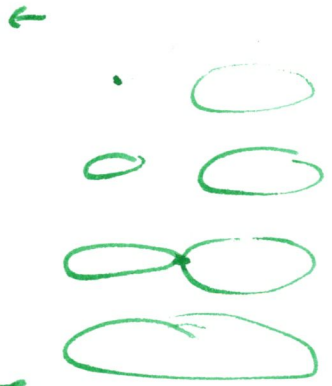
Film:



"Haube": Die zwei zusammenstreffenden ^{hängenden} Kreise, die sich berühren, (Einkühlung)

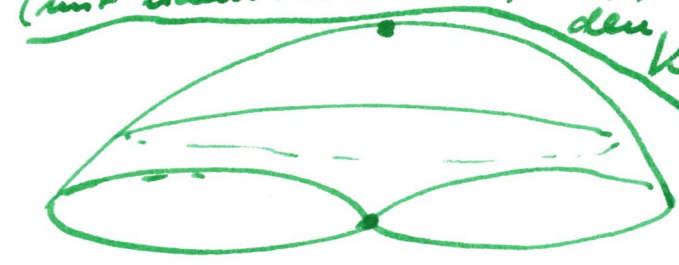


Film:



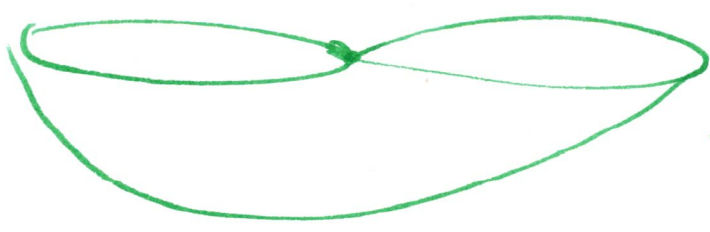
haben die Eigenschaft, dass eines der beiden in Flächenstück ihre Ausnahmepunkte berandet (mit einem lok. Max./Min), das

Kuie:



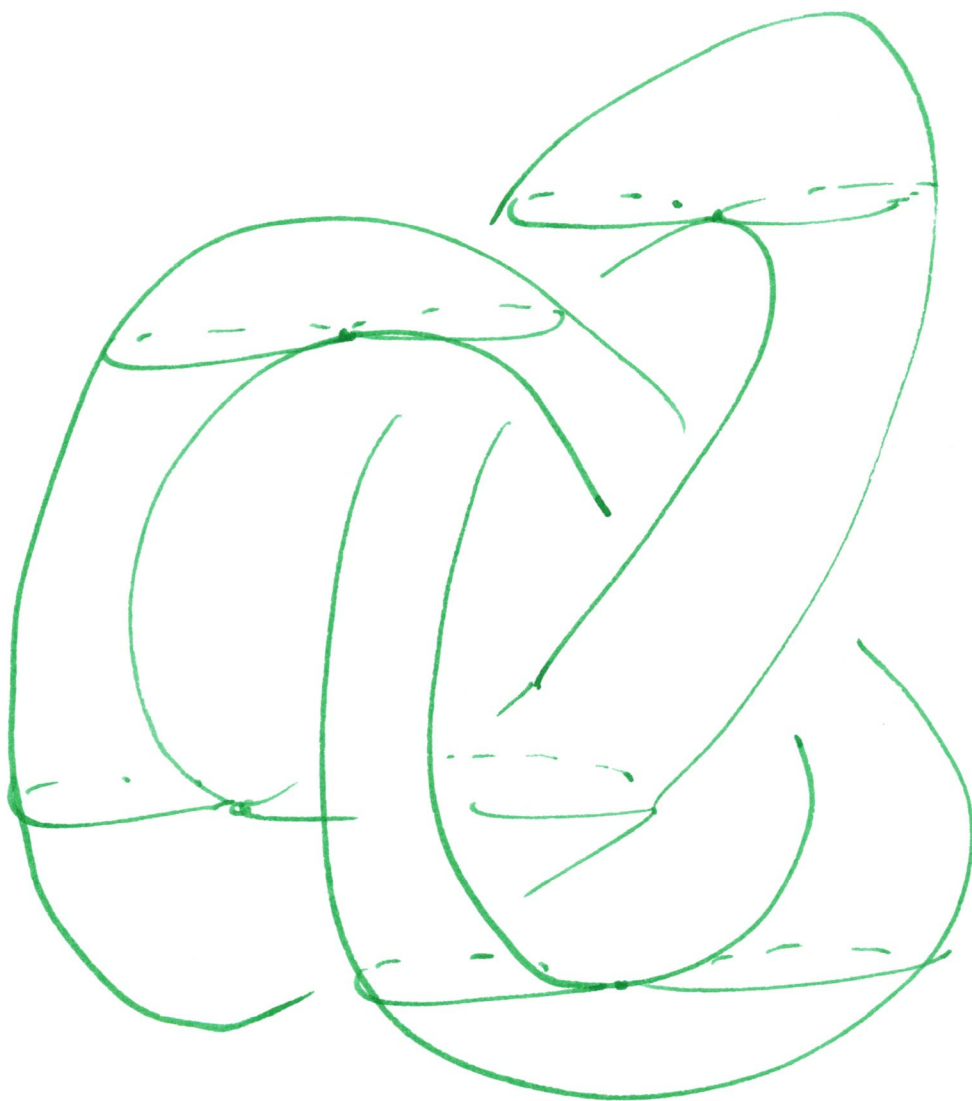
den anderen Kreis nicht als Randkomponente hat.

← oberes



← unteres

Auswahlpunkt sei ein
Punkt, wo sich ~~die~~ zwei
1-Sphären treffen.



Hier: Nur zwei obere und
zwei untere Kreise,

vier Schnittpunkte

(Zylinder, deren Ränder
je einen Auswahl-
punkt haben, sonst
keine Auswahlpunkte)

Satz (ohne Beweis):

Jeder in S^3 eingebettete
Torus berandet einen Volltorus
mindestens auf einer der beiden
resultierenden Hälften.

Wir sagen, ein Torus T sei
in Brückenform bezüglich einer
flachen-Scheibe (E) (oder Sphärenscheibe),
wenn aus den Schnitten mit
Kniee und Schenkel resultieren.



Betrachtet man zwei Grenz-ebenen,
die alle Knie schneiden, so
gibt es eine Seele im Volltorus,
die bezüglich dieser Ebenen eine
Brückendarstellung hat, wobei die
Anzahl der Brücken gleich der
halben Anzahl der Schenkel
ist.

Wir benutzen ^{ohne Beweis} einen Hilfssatz (Hilfssatz 7 in [Schubert, 1954]).

Sei k ein Knoten, der bezüglich einer Schar konzentrischer Sphären (E_i) eine Brückendarstellung zweiter Art hat. V_1, \dots, V_n seien Voll~~ringe~~^{tori} $\subseteq S^3$, von denen jedes k nicht-trivial im Inneren enthalte, und deren Ränder T_1, \dots, T_n paarweise disjunkt seien.

Dann gibt es eine Isotopie ^(von S^3), die die T_i in Brückenform bezüglich der Schar (E_i) bringt [Die Schar wird nicht mitbewegt], und so dass k in eine Brückendarstellung mit der gleichen Anzahl an Brücken überführt wird.
(„Beseitigung von Hanben, Frühhilfungen“...)

Beweis Satz 5.9

Unter den gegebenen Voraussetzungen wollen wir also die Formel Ungleichung

$$\alpha \sum_{i=1}^n (b(L_i) - 1) + \alpha \leq b(K)$$

beweisen. ↑ Sehen wir Volltori

Sei K in Brückendarstellung bezüglich der Sphärenschicht (E_i) mit $b(K)$ Brücken. E_1 sei die innerste Sphäre. Nach dem Hilfsatz können wir annehmen, dass die Ränder T_i der Volltori V_i in Brückendarstellung bezüglich (E_i) sind. Wir können auch annehmen: Jedes innere K_i wird von E_1 geschnitten, und keine zwei Ausnahmepunkte der T_1, \dots, T_n liegen auf der selben Sphäre.



Die zusammenhängenden Komponenten
des Durchschnitts der Volltori V_i -152
mit E_1 wollen wir als

- innere Flächenstücke ^{scheide}
bezeichnen. Sei e_i ein solches.

Im abgespaltenen

Komplement $e_i' := E_1 \setminus e_i$

liegen alle übrigen Schnittstücke von T_i
mit E_1 . ($e_i \cong D^2$)

Zusammenhangskomponenten des
Die Durchschnitts aller Volltori

mit E_1 nennen wir innere

Flächenstücke. Wir wollen die
Zahlen von k mit der Anzahl ~~der~~
des inneren Flächenstücke abschätzen.

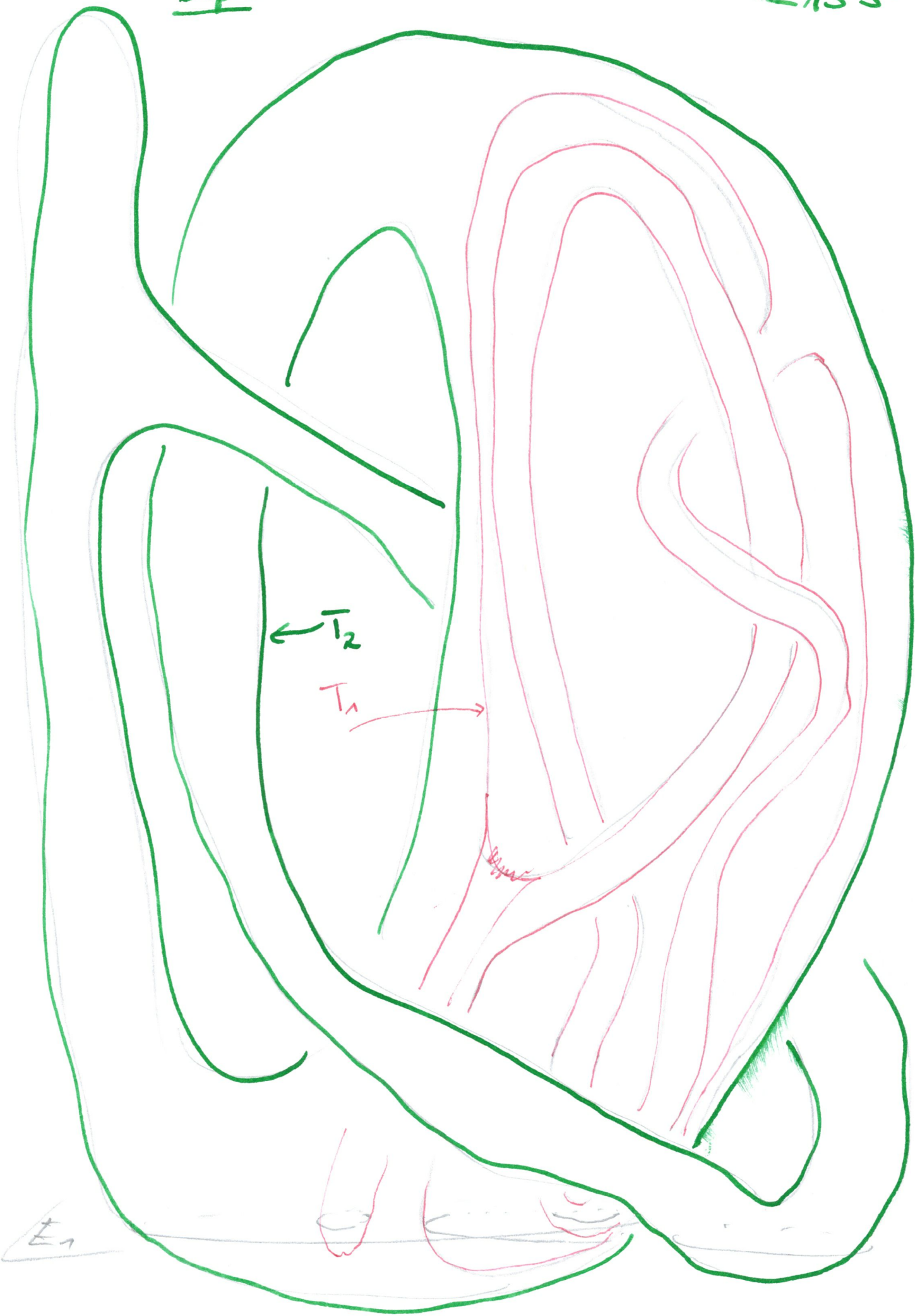
Sei β_i die Anzahl der inneren
Knie von T_i . Dann ist

$$\sum_{i=1}^n (\beta_i - 1) + 1 = \gamma.$$

[Im nächsten Schritt: Jedes innere
Flächenstück enthält α Segmente
von $k \Rightarrow$ Beh.]

Bsp:

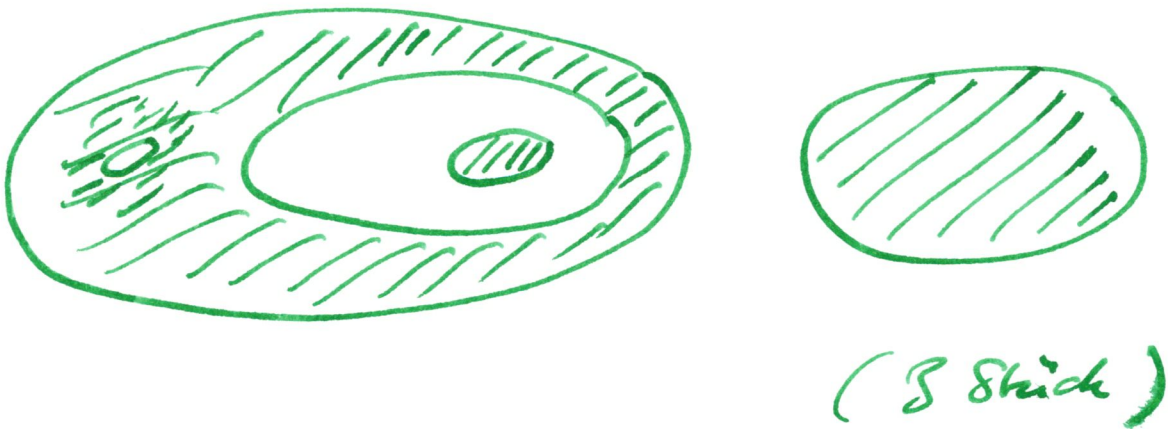
-153-



Schnittkreise mit unterer
Grenzebene hier und ange-
deutet die Seite mit der
Elementarscheibe (für obiges Bsp)



kurve Flächenstücke hier:



(3 Stück)

Zeweis der Formel:

1. Schritt: Mit vollst. Induktion nach n beweisen wir: ~~gilt für~~ ~~die~~ Vollkon,
 die bezüglich eines Knotens neben-
geordnet sind und deren Ränder
 in Brückenform sind, gibt es
 eine innere Flächenbarflächeneinst. ^{schneide eines} ~~Voll~~
 die die ~~die~~ ~~die~~ ~~Schnitt~~ der
 Ränder alle anderen Vollkon mit E_1
 enthält.



↑
 ofel.
 zu T_1

$n=1$ ✓

$(n-1) \Rightarrow (n)$:

Seien V_1, \dots, V_n .

ObdA hat $V_n \cap E_1$ eine
 innere Flächenbarflächeneinst., die die
~~die~~ ~~die~~ ~~Schnitt~~

$E_1 \cap T_2, \dots, E_1 \cap T_{n-1}$

enthält. Sind in e_1 auch alle
 Schnitt $E_1 \cap T_n$: dann folg.

Gibt es einen Schnittkreis von $T_n \cap E_1$
 der nicht in e_1 liegt.

T_n liegt im Inneren von V_1 - 136.

(sonst kann V_n nicht das Komplement von V_1 enthalten!)

\Rightarrow Jeder Schnitt von T_n mit E_1 liegt auf einer inneren ^{elementar-}Schneide von V_1 . Es gibt also eine inner elementarschneide f_1 ^{von V_1} die einen Schnitt mit T_n enthält. Der Rand von f_1 liegt damit im

Inneren einer elementar-schneide e_n von V_n .

$f_1 \not\subset e_n$, sonst kein Schnitt mit T_n .

(*) nicht notwendig in jeder.

Also: e_n enthält das zu f_1

komplementäre Flächenstück.

Dort liegen alle Schnitte von T_1 mit E_1

und auch bereits ~~$T_2 \cap E_1$~~ e_1 ,

das $T_2 \cap E_1, \dots, T_{n-1} \cap E_{n-1}$

enthält.



2. Schritte

Formel stimmt für $n=1$.

Dann ist $\beta_n = \gamma$.

Formel gelte für $n-1$ ^{komplementäre von} ~~Vollständig~~.

Seien nun V_1, \dots, V_n gegeben.

Nach ggf. Nummerierung gibt es eine Elementarscheibe e_n von V_n , die alle Schnitte von

$T_1 \cap E_1, \dots, T_{n-1} \cap E_1$ enthält.
(wg. 1. Schritt)

Durch Schnitt mit e_n entstehen also genauso viele innere Flächenstücke wie in ~~$V_1 \cap \dots \cap V_{n-1}$~~

$V_1 \cap \dots \cap V_{n-1} \cap E_1$ innhalb von e_n .

Die zu e_n komplementäre Elementarscheibe e'_n liegt auf einem inneren Flächenstück f von V_1, \dots, V_{n-1} . Der Rand von e'_n liegt nämlich auf T_n , der ~~innere~~ Innen der V_1, \dots, V_{n-1} liegt.

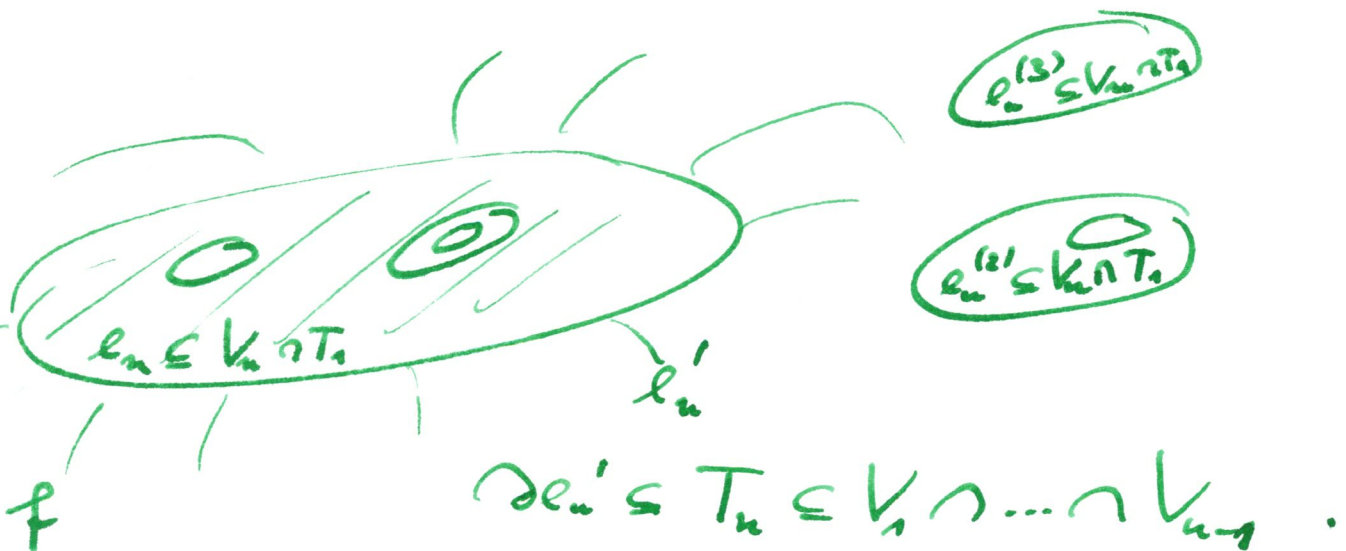
Außerdem: e_n' trifft keinen der Ton T_1, \dots, T_{n-1} . -158-

Alle übrigen für V_1, \dots, V_{n-1} inneren Flächenstücke liegen in e_n . Nun ~~trifft also~~ es fällt also

$$f \cap V_n \neq e_n$$

in $(\beta_n - 1)$ neue inneren Flächenstücke ~~unter~~ und in $f \cap e_n$ ein Flächenstück, Also: Die Zahl der inneren Flächenstücke addiert sich nun $(\beta_n - 1)$.

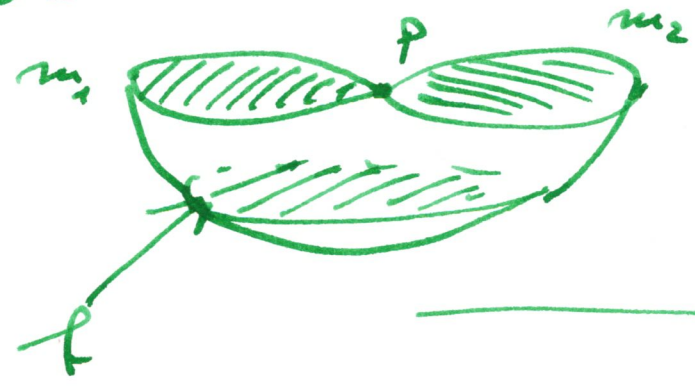
→ weil sich die Ton nicht gegenseitig schneiden.



bleibt zu zeigen:

Jedes ~~Elementarflächen~~ zush.
innere Flächenstück $f \subseteq V_1 \cap \dots \cap V_n \cap E$
enthält α viele Segmente von k .

Klar, falls f eine innere Elementar-
scheibe ist. Denn:



Verschiebe f entlang der Scheibe
bis Ausnahmepunkt erreicht wird.
Behalte zwei Meridianscheiben m_1
und m_2 , die sich in P berühren.
Im Inneren schneiden sie k je α
viele Male. Da k in Brückendar-
stellung bezüglich E_1 und E_0 ist,
müssen in f α viele Segmente
liegen.

Sei nun f nicht mehr -160-
eine Scherbe (sondern eine
Scherbe, aus der kleinere
Scherben entfernt wurden.)

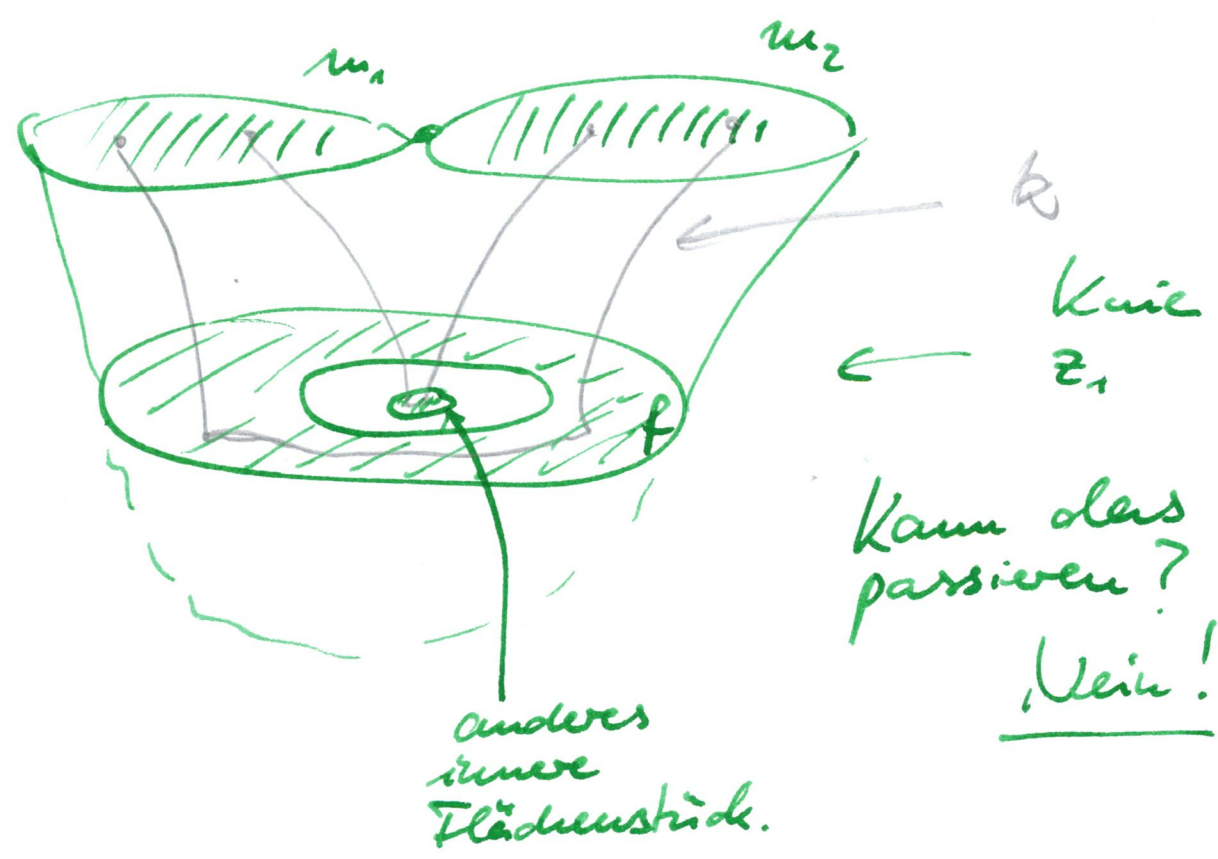
f hat mehrere Randkomponenten
 s_1, s_2, \dots, s_r . Jeder Randkom.
liegt auf höchstens einem
Torus (je zwei Kreise desselben
Torus schneiden disjunkte Grenz-
Scherben aus.)

Legt s_j auf einem Kreis z_j von
 T_j . s_j zerlegt E_1 in eine
Grenzscherbe e_j ~~und~~
und die komplementäre Scherbe e_j' .

$$f = e_1 \cap \dots \cap e_r.$$

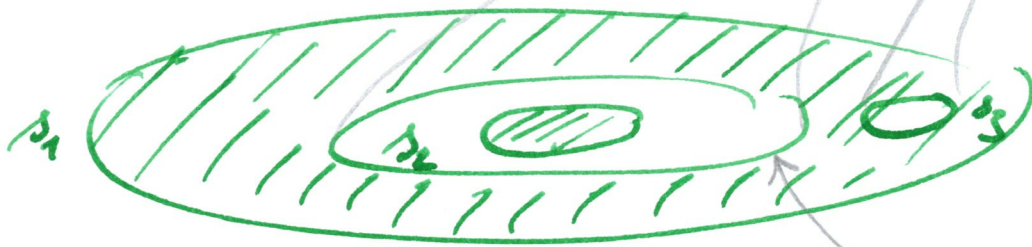
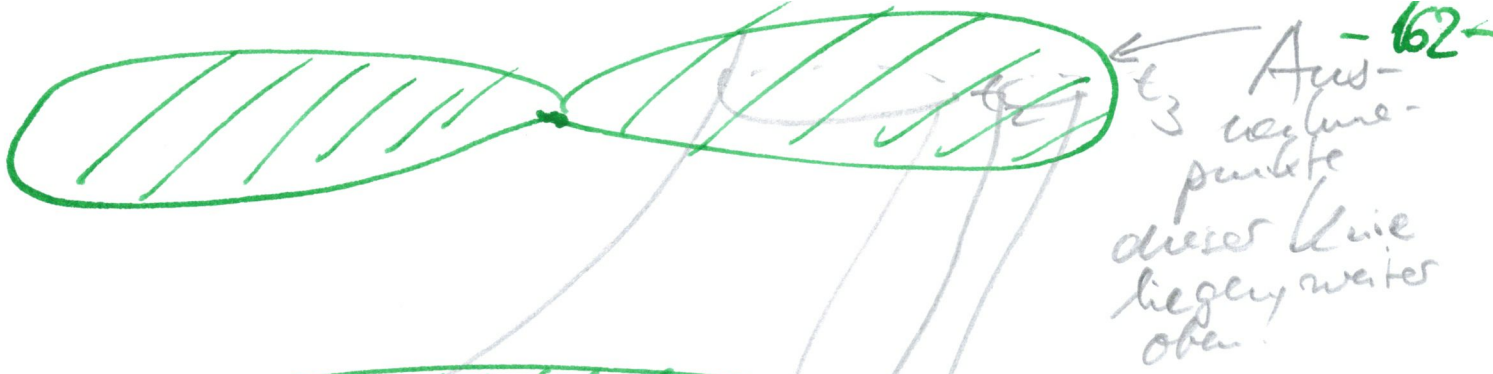
Sei E die ^{Sphäre} ~~Sphäre~~ ~~und~~ der
~~Sphäre~~ Schar (E_i) , die

einen Ausnahmepunkt eines der Kreise berührt. Ob A sei dies das Kreis z_1 .



← z_1

Nein!

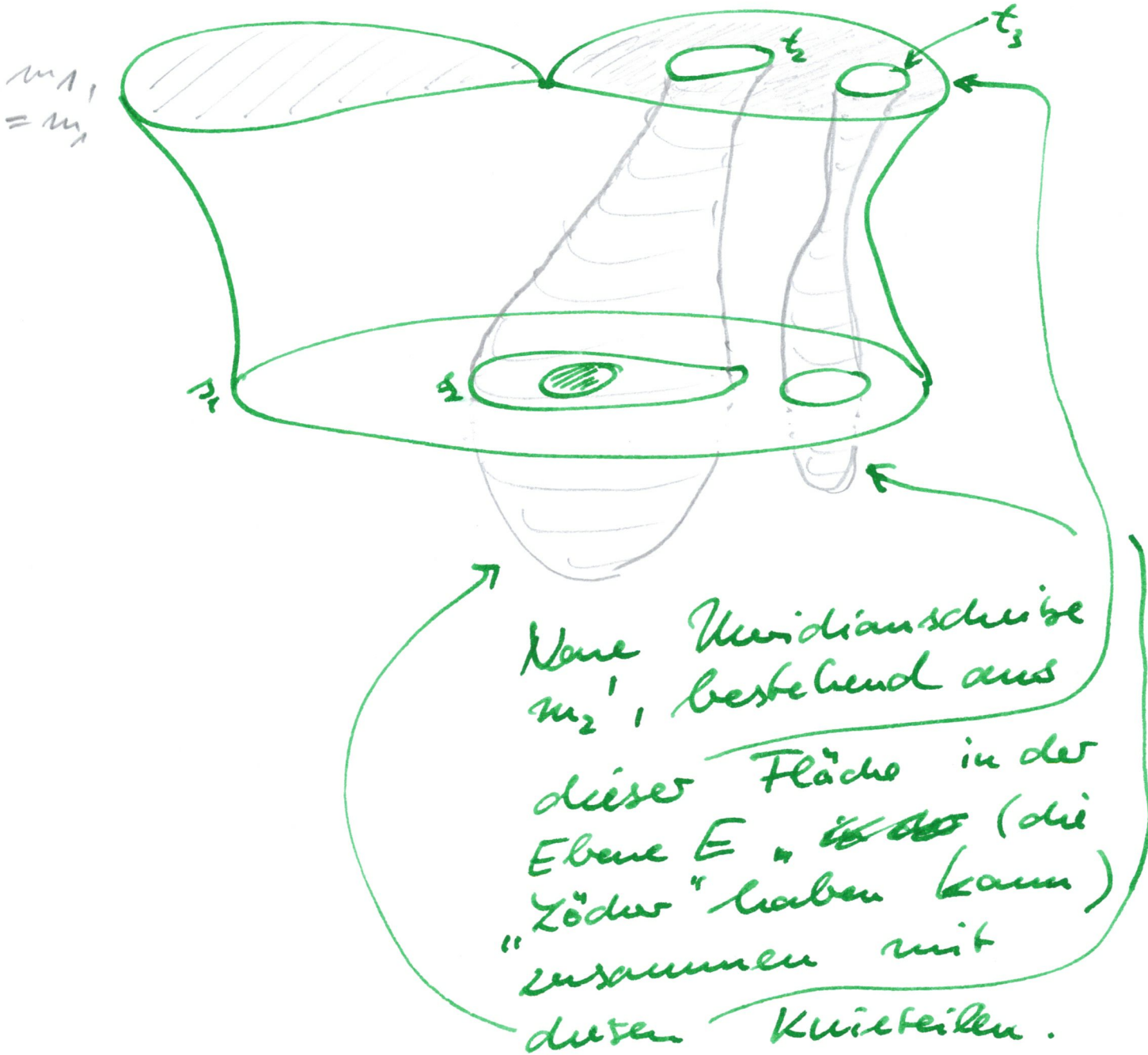


gehört zu einem Knie von einem der Ton T_2, \dots, T_r , obdA T_2

Der entsprechende Zylinder zu s_2 muss durch eine der Schichten m_1 oder m_2 gehen und in t_2 schneiden

Gehalte neue Meridianschichten m'_1, m'_2 durch Entfernung des ~~Zylinders zusammen mit dem Teil von T_2 , der unterhalb E_1 verläuft.~~ der von t_2, t_3, \dots berandeten Schichten innerhalb m_1 oder m_2 und durch Aufhängen der Zylinder zwischen t_2 und s_2 , zwischen t_3 und s_3, \dots und der jeweils unterhalb E_1 liegenden Knie ^{teile} ~~zu~~.

D.h., wir stellen so eine Situation:



Neue Meridianschneise m_2' , bestehend aus dieser Fläche in der Ebene E ~~in der~~ (die "Zöcher" haben kaum) zusammen mit diesen Klüfteilen.

Beobachte nun:

$$|m_i' \cap k| \geq \alpha$$

für $i=1,2$.

Der Knoten k kann die ange-
legten Kurzteile der Tori

T_2, \dots, T_r in der Konstruktion

von m_1', m_2' nicht schneiden.

Also führen 2α viele Segmente

von k zur ~~Strecke~~

inneren Fläche f , und dort
verlaufen also α viele Segmente.

