

# V. Fundamentalgruppe und Knotenkomplemente

---

## 1. Fundamentalgruppe

Sei  $X$  ein top. Raum. Eine <sup>stetige</sup> Abb.

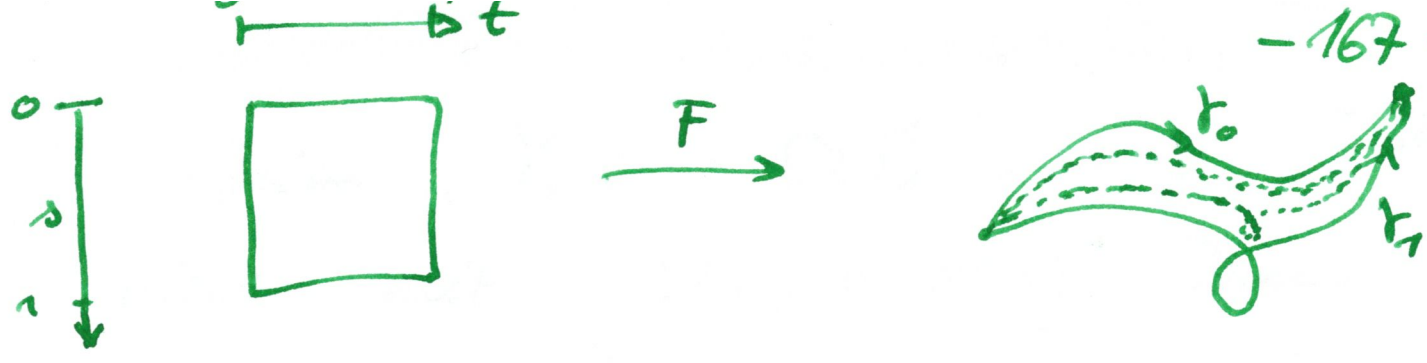
$\gamma: [0,1] \rightarrow X$  nennen wir  
Weg mit Anfangspunkt  $\gamma(0)$  und  
Endpunkt  $\gamma(1)$ . Wir sagen, ein  
Weg  $\gamma$  ist geschlossen, wenn  $\gamma(0) = \gamma(1)$ .

Seien  $\gamma_0, \gamma_1$  Wege mit gleichem  
Anfangspunkt  $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) =: P$  und gleichem  
Endpunkt  $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) =: Q$ . Wir sagen,  
 $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  sind homotope Wege,  
wenn es eine <sup>stetige</sup> Abb.

$$F: [0,1] \times [0,1] \rightarrow X$$
$$(t,s) \mapsto F(t,s)$$

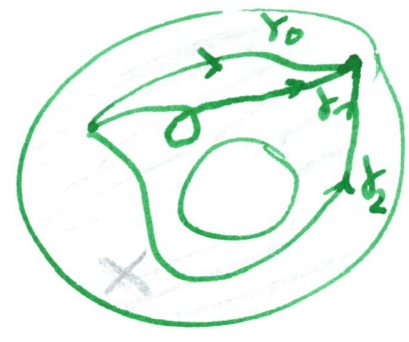
gibt, so dass

$$\begin{array}{ll} F(t,0) = \gamma_0(t) & \forall t \\ F(t,1) = \gamma_1(t) & \forall t \\ F(0,s) = P & \forall s \\ F(1,s) = Q & \forall s \end{array}$$



Schreibweise:  $\gamma_0 \approx \gamma_1$ , wenn diese Wege homotop sind.

Die Familie von Wegen  $F_s: [0,1] \rightarrow X$ ,  $t \mapsto F(t,s)$  haben alle den gleichen Anfangs- und Endpunkt.



Sind  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  homotop? von  $P$  nach  $Q$

Sei  $X$  top. Raum,  $P, Q \in X$ .

Lemma: Homotopie von Wegen ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Wege.

Beweis: Übung.

Notation: Wir schreiben  $[\gamma]$  für die Äquivalenzklasse eines

~~Sei nun  $X$  ein top. Raum und sei  $x_0 \in X$ . Wir wollen geschlossene Wege mit Anfangs- / Endpunkt  $x_0$  betrachten. Wir sprechen dann Weges  $\gamma$ .~~

-168-

Seien  $\gamma, \sigma : [0,1] \rightarrow X$

Wege mit  $\gamma(1) = \sigma(0)$ . Dann  
definieren wir

$$\gamma * \sigma : \begin{cases} [0,1] \rightarrow X \\ t \mapsto \begin{cases} \gamma(2t) & t \leq \frac{1}{2} \\ \sigma(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \end{cases} \end{cases}$$

und nennen dies die Verkettung  
von  $\gamma$  mit  $\sigma$ .

Lemma 1.2: Ist  $\gamma_0 \simeq \gamma_1$  und ist  $\sigma_0 \simeq \sigma_1$ ,  
dann ist  $\gamma_0 * \sigma_0 \simeq \gamma_1 * \sigma_1$ .

Beweis: Übung.

Sei  $x_0 \in X$ . Wir bezeichnen  
mit  $\underline{x_0}$  den konstanten Weg  
 $\underline{x_0}: t \mapsto x_0$ .

Übung: Sei  $\gamma$  ein Weg mit  
 $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ . Dann ist

$$\gamma * \underline{x_0} \simeq \gamma \simeq \underline{x_0} * \gamma.$$

Ist  $\gamma$  ein Weg von  $x_0$  nach  $x_1$ .

Wir bezeichnen mit  $\bar{\gamma}$  den

$$\text{Weg } \begin{cases} [0,1] \rightarrow X \\ t \mapsto \gamma(1-t) \end{cases}$$

und nennen dies den zu  $\gamma$  inversen Weg (~~von~~  $\bar{\gamma}$  geht von  $x_1$  nach  $x_0$ )

~~Wichtig~~

Prop 1.3 Es ist  $\gamma * \bar{\gamma} \approx \underline{x_0}$   
 und  $\bar{\gamma} * \gamma \approx \underline{x_1}$ .

Def:  $\pi_1(X, x_0) :=$  Menge der Äquivalenzklasse von Wegen mit Anfangs- und Endpunkt  $x_0$ .

Aus Obigem sehen wir bereits:

$$* : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

$$[\gamma], [\sigma] \mapsto [\gamma * \sigma] =: [\gamma] * [\sigma]$$

ist wohldefiniert.  $\underline{x_0}$  ist neutral bezüglich dieser Verknüpfung, und für alle  $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$  ist  $[\bar{\gamma}] \in \pi_1(X, x_0)$  ein (links- und rechts-) inverses bezüglich

-170

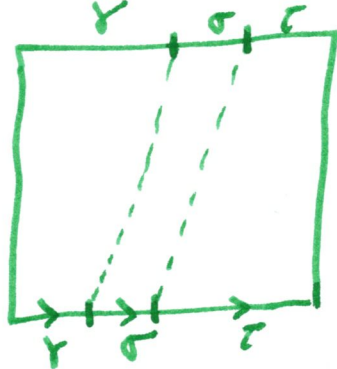
Satz <sup>1.4</sup>:  $\pi_1(X, x_0)$  ist eine Gruppe  
bezüglich der Verknüpfung  $*$ .

Zum Beweis bleibt noch die  
Assoziativität zu zeigen:

$$(\gamma * \sigma) * \tau \approx \gamma * (\sigma * \tau)$$

$\gamma$  in  $x_0$  geschlossenen  
Weg  $\gamma, \sigma, \tau$ .

Skizze der Homotopie:



-11-

Seien  $X$  und  $Y$  top. Räume,  
und sei  $x_0 \in X$ ,  $y_0 \in Y$ .

Eine stetige Abb.  $h: X \rightarrow Y$  mit  
 $h(x_0) = y_0$  induziert nun eine  
Abbildung

$$h_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$
$$[\gamma] \mapsto [h \circ \gamma]$$

Übung: Diese Abb. ist wohldefiniert,  
d.h.  $\gamma_0 \approx \gamma_1 \Rightarrow h \circ \gamma_0 \approx h \circ \gamma_1$ .

Sie ist ~~es~~ sogar ein Homomorphismus.

Beobachtung:  $id: X \rightarrow X$  sei die Identität.  
~~Wichtig~~  $id_* = id_{\pi_1(X, x_0)}$ .

Übung: Sind  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$   
und  $g: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$   
stetige Abb. punktierten Räume (d.h.  
 $f(x_0) = y_0$ ,  $g(y_0) = z_0$ ), dann ist

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

-172-

Korollar:<sup>1.5</sup> Ist  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$   
ein Homöomorphismus, dann ist  
 $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$   
ein Isomorphismus.

Zuweis: Sei  $g: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$   
eine stetige Inverse zu  $f$ , d.h.

$$f \circ g = \text{id}_Y, \quad g \circ f = \text{id}_X.$$

Wegen Obigem ist

$$(f \circ g)_* = f_* \circ g_* = \text{id}_{\pi_1(Y, y_0)}$$

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}.$$



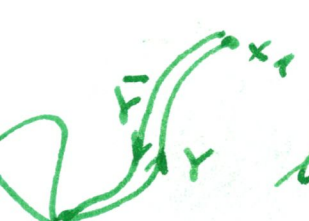
Ist also z.B.  $\pi_1(X, x_0)$  die triviale  
Gruppe und  $\pi_1(Y, y_0)$  nicht-trivial,  
dann kann es keinen Homöomorphismus  
 $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  geben!

# Abhängigkeit vom Basispunkt -173-

Ist  $X$  wegzusammenhängend,  
so gibt es für je zwei Punkte  
 $x_0, x_1 \in X$  einen Weg

$\gamma: [0,1] \rightarrow X$  von  $x_0$  nach  $x_1$ .

1.6  
Lemma:  $I_\gamma: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$

  $[\sigma] \mapsto [(\bar{\gamma} * \sigma) * \gamma]$

$I_\gamma$  ist ein Isomorphismus

Vorsicht:  $I_\gamma$  hängt i. A. von  $\gamma$  ab!

Wir sehen nun: Sind  $X, Y$   
wegzusammenhängend, und ~~und~~  
 ~~$\pi_1(X, x_0)$~~  existiert kein Isomorphis-  
mus zwischen  $\pi_1(X, x_0)$  und  
 $\pi_1(Y, y_0)$ , so können  $X$  und  $Y$   
nicht homöomorph sein.



-174-

Beispiele: •  $\pi_1(\mathbb{R}, 0)$  ist trivial.

• Sei  $S^1 \subseteq \mathbb{C}$  die Einheitskugel.

Dann ist

$$\pi_1(S^1, 1) = \langle [D] \rangle \cong \mathbb{Z}$$

die freie abelsche Gruppe erzeugt durch

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow S^1 \\ t \mapsto e^{2\pi i t}$$

Beweis: Siehe Skript Topologie von Stefan Friedl.

•  $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$   
(Siehe Skript Friedl)

Also:  $\pi_1(T^n) \cong \mathbb{Z}^n$

•  $\pi_1(S^n) = \{1\}$  für  $n \geq 2$ .

Insbesondere: Je zwei Kurven ~~mit~~ mit gemeinsamem Anfangspunkt sind als Wege homotop.

(Selbstdurchkreuzungen sind während der Homotopie erlaubt.)

Beweis: Skript Friedl.

## 2. Homotopieäquivalenz

Seien  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  zwei stetige Abbildungen. Man sagt,  $f_0$  und  $f_1$  sind homotop, wenn es eine stetige Abb.

$$F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

$$\text{gibt mit } F|_{X \times \{0\}} = f_0,$$

$$F|_{X \times \{1\}} = f_1.$$

Für Wege  $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$  ergeben sich daraus insgesamt zwei Homotopie-Begriffe, wenn  $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$  und  $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ . Der Begriff der Weg-Homotopie impliziert dann auch Homotopie zwischen Abbildungen in diesem neuen Sinn, umgekehrt a priori nicht.

Schreibweise:  $f_0 \approx f_1$ .

2.1.

Prop: Seien  $f, g : X \rightarrow Y$   
 zwei stetige Abbildungen mit  
 $f(x_0) = g(x_0) = y_0$ , und seien  
 diese Abb. homotop via einer  
 Homotopie  $F : [0,1] \times X \rightarrow Y$ ,  
 so dass  $F(x_0, s) = y_0 \quad \forall s \in [0,1]$   
 ist. Dann ist

$$f_* = g_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0).$$

Beweis:  
 Übung/Vorlesung

Def: Eine <sup>stetige</sup> Abb.

$f : X \rightarrow Y$  heißt  
 Homotopieäquivalenz zwischen den  
 top. Räumen  $X$  und  $Y$ , wenn  
 es eine stetige Abb.  $g : Y \rightarrow X$   
 gibt mit

$$g \circ f \simeq \text{id}_X$$

$$f \circ g \simeq \text{id}_Y.$$

-177-

Dies ist offenbar ein schwächerer  
Begriff als Homöomorphie:

Übung: • Die Abbildung  
$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto x$$
ist eine Homotopieäquivalenz.

• Die Abbildung  
$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow S^1$$
$$z \longmapsto \frac{z}{|z|}$$
ist eine Homotopieäquivalenz.

Allgemeiner:

• Die Abb.  
$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow S^{n-1}$$
$$x \longmapsto \frac{x}{\|x\|}$$
ist eine Homotopieäquivalenz.

-178-

Satz 2.2 Ist  $f: X \rightarrow Y$  eine Homotopieäquivalenz, und sind  $X, Y$  wegzusammenhängend, dann ist  $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$  ein Isomorphismus.

Beweis: Siehe Skript Friedl. 2.1  
Folgt nicht aus obiger Prop. wegen fehlender Kontrolle über Basispunkt während der Homotopie  $g \circ f \simeq \text{id}_X$  für die  $H$ -inverse  $g$ .

Def: Ein wegzusammenhängender Raum  $X$  heißt einfach zusammenhängend, wenn  $\pi_1(X, x_0) \simeq \{1\}$  die triviale Gruppe ist.

Sei  $A \subseteq X$  eine abgeschl. Teilmenge. Eine Abbildung  $r: X \rightarrow A$  nennt man Retraktion, wenn  $r|_A = \text{id}_A$  ist.

Allgemeines:

-179-

$B^n$  ist h-äq. zu  $\{0\}$

Auch:  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\quad} \{0\}$

Ein Raum, der h.-äq. zu einem Punkt ist, nennt man zusammenziehbar.

$$B^n \xrightarrow{r} \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\begin{array}{ccc} B\{0\} & \xrightarrow{i} & B^n \\ 0 & \longmapsto & 0 \end{array}$$

Dann ist  $r \circ i = \text{id}_{\{0\}}$   
und  $i \circ r = \text{id}_{B^n}$  vermöge

$$F: B^n \times [0,1] \rightarrow B^n$$
$$(x,t) \longmapsto t \cdot x$$

Dann ist  $F(x,0) = i \circ r(x) \quad \forall x \in B^n$   
 $F(x,1) = \text{id}_{B^n}(x)$

180

Bsp ~~der~~ Anwendung der Fundamentalkategorie:

Prop<sup>2.3</sup>: Es gibt keine Retraktion

$$B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\} \xrightarrow{r} S^1 \\ = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$$

Beweis: Angenommen doch. ~~Dann~~  
~~ist~~ Sei  $i: S^1 \hookrightarrow B$  die natürliche Inklusion als Rand.

Dann ist  $r|_{S^1} = \text{id}_{S^1}$   
 $\Leftrightarrow r \circ i = \text{id}_{S^1}$

Sei  $*$   $\in S^1$  ein Basispunkt.

$$r \circ i = \text{id}_{S^1} \Rightarrow r_* \circ i_* = \text{id}_{\pi_1(S^1, *)}$$

Also:  $\pi_1(S^1, *) \xrightarrow{i_*} \pi_1(D^2, *) \xrightarrow{r_*} \pi_1(S^1, *)$   
 $\text{id}$

Aber:  $\pi_1(D^2, *) = \{1\}$ ,  
weil  $D^2$  homotopieäquivalent zum Fix-Punkt-Raum ist.  $\downarrow$

Fassen wir jetzt

$$S^3 \subseteq \mathbb{C}^2$$

als die Einheitskugel in  $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$  auf. Mit komplexen Koordinaten  $(z, w) \in \mathbb{C}^2$  ist also

$$S^3 = \{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1 \}$$

Sei  $k: S^1 \xrightarrow{\hookrightarrow \mathbb{C}} S^3$  gegeben durch  $k(\zeta) = (0, \zeta)$ .

Dann ist  $k$  eine Einbettung, also ein Knoten, und dies ist der triviale Knoten, denn  $k$  berandet eine Scheibe in  $S^3$ :

$$f: \mathbb{D}_1(0) \xrightarrow{\hookrightarrow \mathbb{C}} S^3 \\ = \{ \zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| \leq 1 \}$$

$$\zeta \mapsto \frac{(1-|\zeta|, \zeta)}{\|(1-|\zeta|, \zeta)\|}$$

mit

$$\|(z, w)\| = \sqrt{|z|^2 + |w|^2}$$



-182-

Dann ist  $f$  eine Einbettung  
 der Einheitskreise in  $\mathbb{C}$  in  $S^3$ ,  
 so dass die Einbettung auf  
 den Rand mit  $k$  über-  
 einstimmt (Übung!).

Wir zeigen jetzt, dass das  
 Komplement  $S^3 \setminus k(S^1)$  homotopie-  
 äquivalent zu  $S^1$  ist.

Def:  $S^3 \setminus k(S^1) = \left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid \right.$   
 $\left. \begin{array}{l} \|(z, w)\| = 1 \\ \text{und } z \neq 0 \end{array} \right\}$

Übung: Die Abbildung  
 $S^3 \setminus k(S^1) \rightarrow S^1 \times \overset{\mathbb{C}}{\underset{0}{\cup}} B_r(0)$   
 $(z, w) \mapsto \left( \frac{z}{|z|}, w \right)$   
 ist ein Homöomorphismus.

Also: Das Komplement des  
 Unterraums  $k$  in  $S^3$  ist

homöomorph zu  $S^1 \times \mathring{B}_1(0)$ , -183-  
was offenbar homotopie-äquivalent  
zu  $S^1$  ist.

$$\begin{aligned} \text{Also: } \pi_1(S^3, k(S^1), (1,0)) \\ \xrightarrow{f_*} \pi_1(S^1 \times \mathring{B}_1(0), (1,0)) \\ \cong \\ \xrightarrow{\cong} \pi_1(S^1 \times \{0\}, (1,0)) \\ \cong \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Die Fundamentalgruppe des  
Linknotenkomplements ist also  
isomorph zu  $\mathbb{Z}$ .

-184-

### 3. Etwas über Gruppenpräsentierungen / etwas Gruppentheorie

Sind  $G$  und  $H$  Gruppen, dann ist  $G \times H$  wieder eine Gruppe mit

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) := (g_1 g_2, h_1 h_2).$$

$G$  und  $H$  sind vermöge

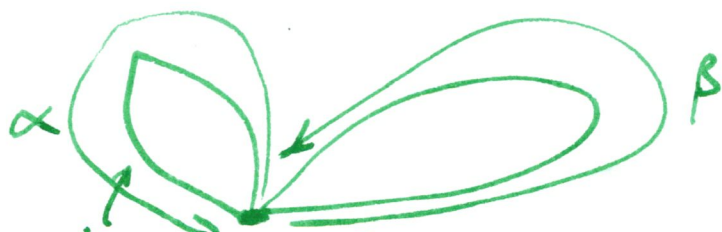
$$i_G : G \rightarrow G \times H \\ g \mapsto (g, e_H)$$

$$i_H : H \rightarrow G \times H \\ h \mapsto (e_G, h)$$

normale Untergruppen von  $G \times H$ .  
Diese Untergruppen kommutieren sogar.

Beispielsweise ist  $\pi_1(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

Was ist aber die Fundamentalgruppe von der 1-Punktvereinigung  $S^1 \vee S^1$ , skizziert:



je eine  $S^1$  verläuft an einem gemeinsamen Punkt

Es sieht nicht aus, als wäre

$$\alpha * \beta = \beta * \alpha$$

wobei  $\alpha$  und  $\beta$  je die beiden  $S^1$  einmal durchlaufen, mit Basispunkt den Verklebungspunkt.

Seien  $G, H$  Gruppen.

$G * H$  sei die Menge der endlichen Folgen  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , so dass gilt:

(i)  $\forall i$  ist  $x_i \in G$  oder  $x_i \in H \setminus \{e_G\}$

(ii)  $\forall i$  liegen  $x_i$  und  $x_{i+1}$  in verschiedenen Gruppen

Die leere Folge ist erlaubt ( )

Auf  $G * H$  definiert man dann eine Verknüpfung durch nebeneinanderstellen der Folgen. Treffen zwei Elemente der gleichen Gruppe aufeinander, wird in der Gruppe multipliziert. Wenn dies das triviale Element ist streiche dieses Element und fahre fort .... :

$$\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{\in G * H}, \quad (y_1, \dots, y_m) \in G * H$$

→

$$(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$$

wenn  $x_n$  und  $y_1$   
in versch. Gruppen  
liegen

$$(x_1, \dots, x_n \cdot y_1, \dots, y_m)$$

wenn  $x_n$  und  $y_1$   
in der gleichen  
Gruppe liegen und  
 $x_n \cdot y_1 \neq e$

$$(x_1, \dots, x_{n-1} \cdot y_2, \dots, y_m)$$

wenn  $x_n \cdot y_1 = e$   
und  $x_{n-1} \cdot y_2 \neq e$

...

Dann ist  $G * H$  eine Gruppe

Offenbar ist  $(x_1, \dots, x_n)^{-1} = (x_n^{-1}, x_{n-1}^{-1}, \dots, x_1^{-1})$

denn

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (x_n^{-1}, x_{n-1}^{-1}, \dots, x_1^{-1})$$

$$= ( )$$

# Universelle Eigenschaft des freien Produkts

Lemma 31: Seien  $G, H$  Gruppen.  
Dann sind die Abbildungen

$$i_G: G \rightarrow G * H \\ g \mapsto (g) \quad \text{und}$$

$$i_H: H \rightarrow G * H \\ h \mapsto (h)$$

injektive Homomorphismen.

## Lemma (Universelle Eig. des freien Produkts)

Seien  $G_1, G_2$  Gruppen. (i) Dann gibt es eine Gruppe  $H$  mit folgender Eigenschaft:  
Für je zwei Homom.  $\alpha_1: G_1 \rightarrow K$   
 $\alpha_2: G_2 \rightarrow K$

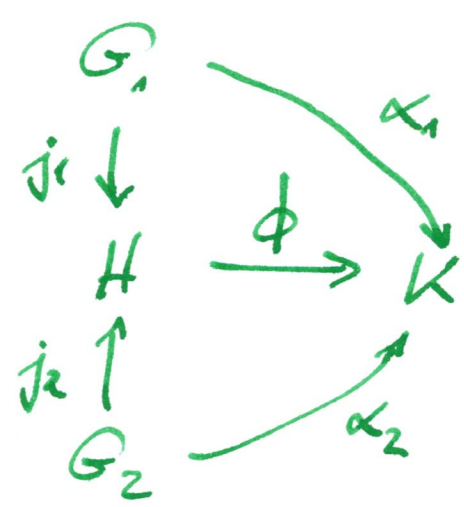
gibt es genau einen Homom.  
 $\phi: H \rightarrow K,$

32  
Lemma (Univ. Eig. des freien  
 Produkts)

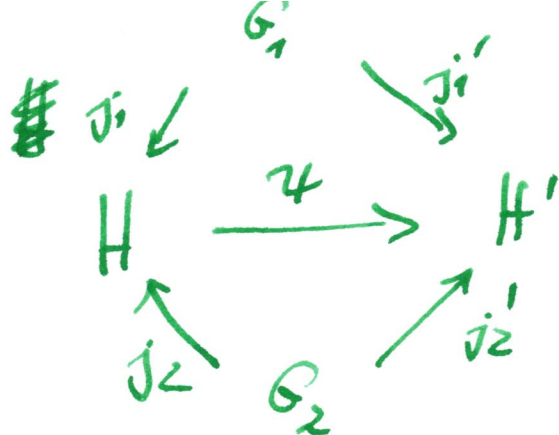
Seien  $G_1, G_2$  zwei Gruppen.

(i) Dann gibt es eine Gruppe  $H$   
 und Homom.  $j_1: G_1 \rightarrow H$ ,  
 $j_2: G_2 \rightarrow H$ , so dass gilt:

Für je zwei Homom.  $\alpha_1: G_1 \rightarrow K$ ,  
 $\alpha_2: G_2 \rightarrow K$  in eine Gruppe  $K$   
 gibt es genau einen Homom.  
 $\phi: H \rightarrow K$ , so  
 dass folgendes Diagramm  
 kommutiert:



(ii) Das Tripel  $(H, j_1, j_2)$  ist bis auf  
 eindeutige Isomorphie durch diese  
 Eigenschaft in (i) bestimmt, d. h. ist  
 $(H', j_1', j_2')$  ein weiteres Tripel, das (i)  
 erfüllt, so gibt es genau einen Isom.  
 $\psi: H \rightarrow H'$ , so dass



Kommutativ.

Beweis:

(i) Man setzt  $H := G_1 * G_2$   
 mit  $j_1 = i_1$ ,  $j_2 = i_2$  wie in  
 vorherigem Lemma.

Schreibt sich  $g \in G_1 * G_2$  als

$$g = (g_1^{(m_1)} g_2^{(m_2)} \dots g_n^{(m_n)})$$

mit  $g_i^{(m_i)} \in G_{m_i}$  mit  $m_i \in \{1, 2\}$   
 für  $i = 1, \dots, n$ ,

dann setzt man

$$\begin{aligned}
 \phi(g) = & \alpha_{m_1}(g_1^{(m_1)}) \cdot \\
 & \alpha_{m_2}(g_2^{(m_2)}) \cdot \\
 & \dots \cdot \alpha_{m_n}(g_n^{(m_n)})
 \end{aligned}$$

Dies macht das Degr. kommutativ.

(ii) Übung: Wende (i) mit  $(H, j_1, j_2)$   
 von  $(K, \alpha_1, \alpha_2)$  an und  
 umgekehrt .... □



Sei  $s$  ein Symbol. Wir bezeichnen mit

$\langle s \rangle := \{ \dots, s^{-2}, s^{-1}, e, s, s^2, \dots \}$   
die freie abelsche Gruppe, die von  $s$  erzeugt wird.  
( $\langle s \rangle$  ist isomorph zu  $\mathbb{Z}$ .)

(„Bildstaben“)

Sind  $s_1, \dots, s_k \in \Sigma$  Symbole, so bezeichnet man mit

$$F(s_1, \dots, s_k) := \langle s_1 \rangle * \dots * \langle s_k \rangle$$

die freie Gruppe ~~in den~~ in den Erzeugern  $s_1, \dots, s_k$ .  
Alternative Schreibweise:  
 $\langle s_1, \dots, s_k \rangle$

Sind nun  $r_1, \dots, r_m$  Wörter in den Symbolen  $s_1^{\pm 1}, \dots, s_k^{\pm 1}$ , d.h. Ausdrücke der Form

$$r = s_{n_1}^{t_1} \dots s_{n_l}^{t_l}$$

$t_i \in \mathbb{Z}$   
 $n_i \in \{1, \dots, k\}$   
für  $i = 1, \dots, l$   
und  
 $n_{i+1} \neq n_i \forall i$

dann sei  $\langle s_1, \dots, s_k \mid r_1, \dots, r_m \rangle$   
wie folgt definiert:

$\langle\langle r_1, \dots, r_m \rangle\rangle$  bezeichne  
die kleinste normale Unter-  
gruppe von  $F(s_1, \dots, s_k)$ , die  
alle Wörter  $r_1, \dots, r_m$  enthält. (\*)

Dann ist

$$\langle s_1, \dots, s_k \mid r_1, \dots, r_m \rangle := F(s_1, \dots, s_k) / \langle\langle r_1, \dots, r_m \rangle\rangle$$

eine Gruppe, die wir die von  
 $s_1, \dots, s_k$  erzeugte Gruppe mit den  
Relationen  $r_1, \dots, r_m$  nennen.

(\*) Allgemein: Ist  $A \subseteq G$  eine  
Teilmenge einer Gruppe  $G$ , so ist

$$\langle A \rangle = \bigcap_{A \subseteq H \triangleleft G} H$$

↑ Normalteiler

Übung:

$$\langle\langle A \rangle\rangle = \left\{ g_1 a_1^{\epsilon_1} g_1^{-1} \cdot \dots \cdot g_l a_l^{\epsilon_l} g_l^{-1} \mid \begin{array}{l} \text{für ein} \\ l \in \mathbb{N}_{\geq 1}: \\ \epsilon_i \in \{-1, 1\}, \\ g_i \in G, \quad i=1, \dots, l \end{array} \right\}$$

Lemma 3.3: Seien  $g_1, \dots, g_l$  Elemente einer Gruppe  $G$ . Dann gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus

$$\phi : F(s_1, \dots, s_l) \rightarrow G,$$

so dass  $\phi(s_i) = g_i$  für  $i=1, \dots, l$ .

Beweis: Obiges Lemma angew. auf

$$\alpha_i : \langle s_i \rangle \rightarrow G$$

$$s_i \mapsto g_i$$

$$i = 1, \dots, l.$$

Lemma Beobachtung:

Seien  $g_1, \dots, g_k$  Elemente einer Gruppe  $G$ , und seien  $r_1, \dots, r_m$  Wörter in Symbolen  $s_1, \dots, s_k$ .  
Gilt für den Gruppenhonom.

$$\phi: F(s_1, \dots, s_k) \rightarrow G,$$

da  $\phi(s_i) = g_i$  für  $i = 1, \dots, k$

und auch  $\phi(r_1) = \dots = \phi(r_m) = e_G$ ,

dann faktorisiert  $\phi$ , d.h.  $\exists \bar{\phi}$   
es gibt genau einen Homom.  $\bar{\phi}$ , so dass

$$\begin{array}{ccc}
 \langle s_1, \dots, s_k \mid r_1, \dots, r_m \rangle & \xrightarrow{\bar{\phi}} & G \\
 \uparrow \text{kan. Proj.} & \nearrow \phi & \\
 F(s_1, \dots, s_k) & & 
 \end{array}$$

kommutiert.

Def: Wir sagen, die Gruppe  $G$  hat die Präsentation  ~~$\langle g_1, \dots, g_k \mid R_1, \dots, R_m \rangle$~~ , wenn  $g_i \in G$  für  $i = 1, \dots, k$

Def: Wir sagen, die Gruppe  $G$  -192-  
186 präsentiert durch

$$\langle s_1, \dots, s_k \mid r_1, \dots, r_m \rangle,$$

wenn  $g_1, \dots, g_k$  Elemente in  $G$   
sind, so dass die Konstruktion  
in obiger Beobachtung einen  
Isomorphismus

$$\Phi : \langle s_1, \dots, s_k \mid r_1, \dots, r_m \rangle \rightarrow G$$

liefert. Etwas salopp schreiben wir  
dafür auch

$$G = \langle g_1, \dots, g_k \mid R_1, \dots, R_m \rangle$$

$$\text{oder } G = \langle g_1, \dots, g_k \mid R_1 = e, \dots, R_m = e \rangle,$$

wobei die Wörter  $R_i$  durch Ersetzen  
des Wörtes von  $s_j$  durch  $g_j$ ,  $j = 1, \dots, k$   
aus den Wörtern  $r_1, \dots, r_m$  entstehen.

Beispiele:

$$\bullet \mathbb{Z}/k \cong \langle g \mid g^k \rangle$$

$$\mathbb{Z} \cong \langle g \rangle$$

$$\bullet \mathbb{Z}^2 \cong \langle x, y \mid [x, y] \rangle$$

$$\text{mit } [x, y] = x y x^{-1} y^{-1}$$

$$\bullet \mathbb{Z}^3 \cong \langle x, y, z \mid [x, y], [x, z], [y, z] \rangle$$

$$\bullet S_3 = \langle (12), (13) \mid (12)^2 = e, (13)^2 = e, \\ (12)(13)(12) = (13)(12)(13) \rangle$$

# Das amalgamierte Produkt

## Lemma 3.4

Seien  $G_1, G_2$  zwei Gruppen, und sei  $G_0$  eine weitere. Seien Homom.

$i_1: G_0 \rightarrow G_1$  und  $i_2: G_0 \rightarrow G_2$

gegeben.

und Hom  $j_i: G_i \rightarrow H, i=1,2$

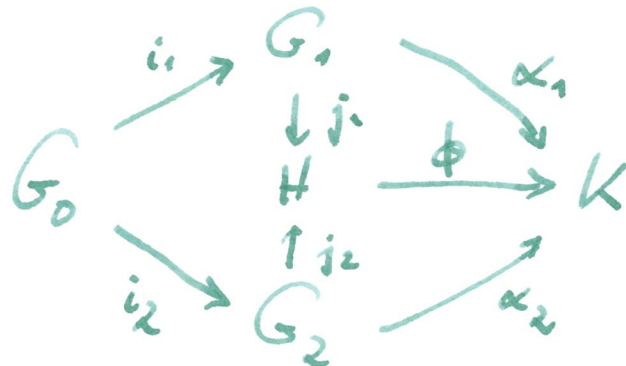
(i) Es gibt eine Gruppe  $H$ , so dass gilt: Für je zwei Homom.

$\alpha_1: G_1 \rightarrow K$   
 $\alpha_2: G_2 \rightarrow K$

so dass  $\alpha_1 \circ i_1 = \alpha_2 \circ i_2$  gilt, gibt es genau einen Homom.

$\phi: H \rightarrow K$ , so dass folgendes

Diagramm kommutiert:



(ii) Das Tripel  $(H, j_1, j_2)$  ist bis auf isom. Isomorphie durch (i) bestimmt, d.h. .... [weiter wie in obigem Lemma]

Beweis: Vorlesung oder Skript Friede-195-  
Redeweise: Wir nennen  $\#$

das freie Produkt von  $G_1$  und  $G_2$  mit Amalgam  $G_0$ .

Schreibweise:  $\# = G_1 \underset{G_0}{*} G_2$

Beide Male unterschlägt man die Homom.  $j_1, j_2$ , die aber selbstverständlich Teil der Definition sind.

Lemma 3.5

~~Wichtig~~: Haben  $G_1, G_2, G_0$  Präsentationen

$$G_1 = \langle g_1, \dots, g_r \mid s_1, \dots, s_m \rangle,$$

$$G_2 = \langle h_1, \dots, h_n \mid t_1, \dots, t_u \rangle,$$

$$G_0 = \langle k_1, \dots, k_o \mid r_1, \dots, r_p \rangle,$$

so hat

$$G_1 \underset{G_0}{*} G_2$$

eine Präsentation

$$\langle g_1, \dots, g_r, h_1, \dots, h_n \mid s_1, \dots, s_m, \\ t_1, \dots, t_u, i_1(k_1) = i_2(k_1), \dots, \\ i_1(k_o) = i_2(k_o) \rangle.$$



Beweis: Übung!

-196-

#### 4. Satz von Seifert-van-Kampen - 197 -

Sei jetzt  $X$  ein top. Raum  
mit Basispunkt  $x_0 \in X$ . Seien  
 $U, V \subseteq X$  offene Mengen, so dass

$$(i) \quad X = U \cup V$$

$$(ii) \quad x_0 \in U \cap V$$

(iii)  $U \cap V$  ist wegzusammenhängend.

Wir haben natürliche Inklusionen:

$$i_U : U \cap V \rightarrow U$$

$$i_V : U \cap V \rightarrow V$$

$$j_U : U \rightarrow X$$

$$j_V : V \rightarrow X$$

Offenbar ist  $j_U \circ i_U = j_V \circ i_V$ ,

also auch  $(j_U)_* \circ (i_U)_* = (j_V)_* \circ (i_V)_*$

als Homom. von  $\pi_1$ . Nach obigem

Lemma gibt es genau einen  
Homomorphismus

$$\phi : \pi_1(U, x_0) *_{\pi_1(U \cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0),$$

so dass .....

# Satz (Seifert - van Kampen) Lunter - 198-

obigen Bedingungen ist der  
eindeutige Homom.

$$\pi_1(U, x_0) *_{\pi_1(U \cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

ein Isomorphismus.

Beweisskizze:

(1) Surjektivität:

Sei  $f: I \rightarrow X$  ein  
geschlossener Weg mit  $f(0) = f(1) = x_0$

$\exists$  Zerlegung  
 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ ,

so dass  $f|_{[t_i, t_{i+1}]}$  ganz in  
 $U$  oder ganz in  $V$  verläuft.

Da  $U \cap V$  wegensammenhängend  
ist, gibt es für jedes  $i$  einen  
Weg  $\gamma_i$  mit  $\gamma_i(0) = f(t_i)$  und  
 $\gamma_i(1) = x_0$ . Man kann daher  
 $f$  so <sup>zu  $\tilde{f}$</sup>  modifizieren, dass  $\tilde{f}(t_i) = x_0$   
für alle  $i$ .  $f$  und  $\tilde{f}$  sind dabei  
weg-homotop.

(2.) Injektivität.

Sei  $f: I \rightarrow X$  ein geschlossener Weg mit  $f(0) = f(1) = x_0$ , so dass  $[f] \in \pi_1(X, x_0)$  das triviale Element ist,  $[f] = [x_0]$ .

Wegen (1.) ist  $\downarrow$  lok. in  $\pi_1(X)$

$$[f] = [f_1] * [g_1] * [f_2] * [g_2] * \dots$$

mit  $f_i$  : geschl. Weg  
in  $(U, x_0)$

$g_i$  : geschl. Weg  
in  $(V, x_0)$

(Wir haben in (1.) eigentlich gezeigt, dass  $(j_U)_* * (j_V)_*$ :

$$\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

surjektiv ist, wobei diese Abb durch das amalgamierte Produkt faktoriisiert)

Nach Voraussetzung gibt es eine Homotopie  $F: I \times I \rightarrow X$

$$\text{mit (*) } F(-, 0) = f_1 * g_1 * f_2 * g_2 * \dots$$

$$\text{und } F(-, 1) = \underline{x_0}$$

Kompaktheits-Argument ("Lebesgue-Lemma") :  $\exists n$  so dass.

$F$  alle Quadrate

$$\left[ \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right] \times \left[ \frac{j}{n}, \frac{j+1}{n} \right]$$

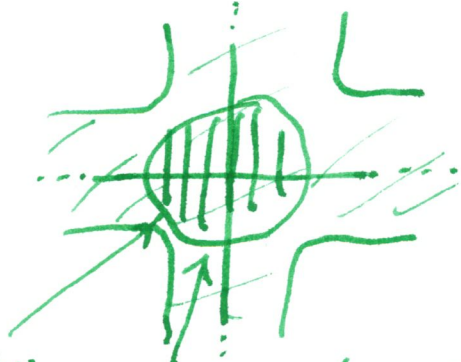
in  $U$  oder in  $V$  abbildet.

ObdA ist  $n$  ein Vielfaches der Anzahl der Elemente, die in  $[f_1] * [g_1] * \dots$  vorkommen.

Dann ist jedes  $f_i$  oder  $g_i$  durch eine Vielfachheit einer Kantenlänge von  $\frac{1}{n}$  repräsentiert parametrisiert in (\*). ObdA wird jeder

Eckpunkt eines Quadrats nach  $x_0$  abgebildet. Somit: Reparametrisierung  $F$ , so dass es  $\alpha$  in einer Umgebung der Kanten konstant ist.

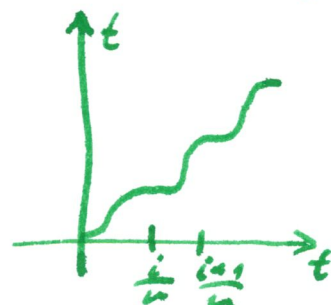
Dann:



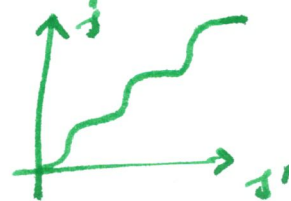
$F$  hier konstant

auf kleine kreisförmige Radius-abh. Fläch. so dass

man im Mittelpunkt auf  $x_0$  abbildet.



und genau für



Zeige nun, dass je zwei benachbarte Zeilen unter  $F$  das gleiche Element in

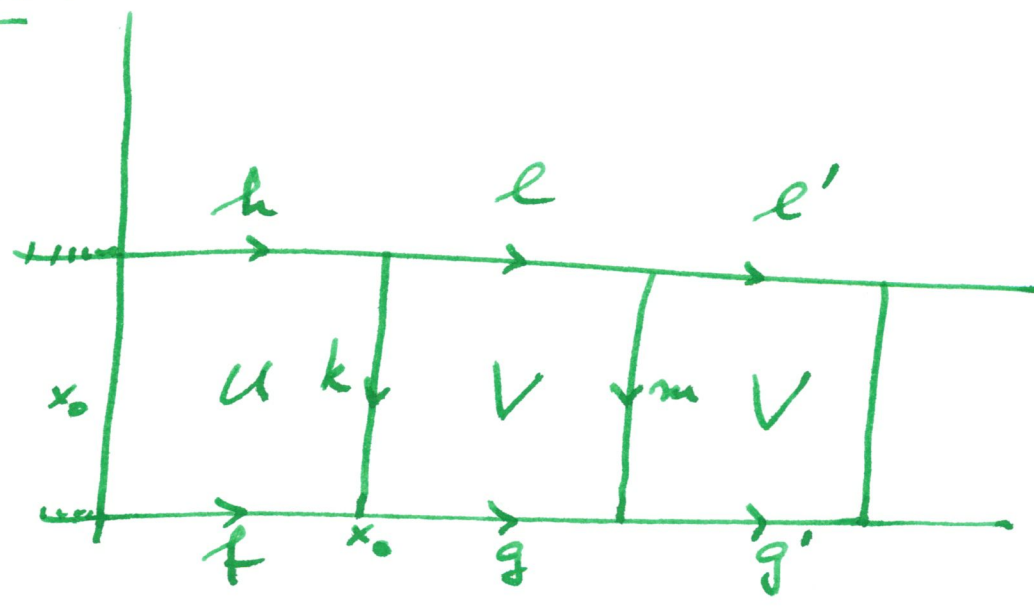
$$\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \underset{\pi_1(U \cup V, x_0)}{\text{repräsentieren.}}$$

Für ein Element  $[k] \in \pi_1(U \cup V, x_0)$  können wir hierfür die Relation

$$\underbrace{(\underbrace{i_U})_* [k]}_{\in \pi_1(U, x_0)} = \underbrace{(i_V)_* [k]}_{\in \pi_1(V, x_0)}$$

benutzen, die im amalgamierten Produkt gilt.

Ausschnitt:



$$\subseteq [0, 1] \times [0, 1]$$

Dann ist (sawische  $[f]_u$  für  $\mathbb{Q}$ -202.  
 Element in  $\pi_1(u)$   
 $[g]_v$  für  
 Element in  $\pi_1(v)$  ....)

~~$[f]_u \cdot [g]_v \cdot [g]_v$~~

$$[f]_u \cdot [g]_v \cdot [g]_v$$

$$= [hk]_u [k'l'm]_v [m'l']_v$$

Multiplikation in  $\pi_1(v)$

$$= [hk]_u [k'l'l']_v$$

Multiplikation in  $\pi_1(u)$ ,  
 $\pi_1(v)$

$$= [h][k]_u \cdot [k']_v [l]_v [l']_v$$

Assoziativ-  
 Relation

$$= [h]_u [k]_v \cdot [k']_v [l]_v [l']_v$$

$$= [h]_u \cdot [l]_v [l']_v$$

D.h. in  $\pi_1(u) *_{\pi_1(u \cap v)} \pi_1(v)$  erhalten  
 wir das  $\bar{F}$  durch sukzessives Hoch-  
 arbeiten in den Zeilen jeweils gleiche  
 Elemente, wobei ganz oben das  
 triviale Element  $[x_0]$  steht. Also

$$\phi \downarrow [f_1] \cdot [g_1] \cdot [f_2] \cdot [g_2] \cdot \dots = [x_0]$$

$[f]_u = [x_0]$  in  $\pi_1(x)$

im assoziativem  
 Produkt



Korollar 4.2

Ist unter obigen Voraussetzungen

$$\pi_1(U \cap V, x_0) = \{1\}, \quad \text{so ist}$$

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V).$$

Bsp: •  $\pi_1(S^u) = \{1\}$  für  $u \geq 2$

•  $\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

Korollar 4.3

unter <sup>den</sup> ~~obigen~~ Voraussetzungen  
~~zu zeigen~~ <sup>in etwa</sup> von Satz 4.1 sei zut.

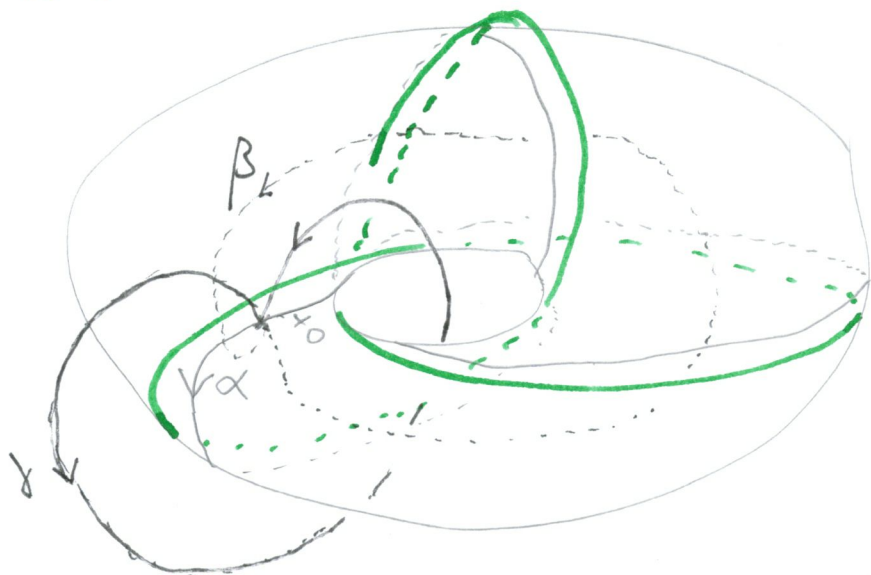
$\pi_1(V) = \{1\}$ . Dann ist

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(U) / \langle\langle \pi_1(U \cap V) \rangle\rangle.$$



Beispiel: Sei  $K$  der Kleeblattknoten.

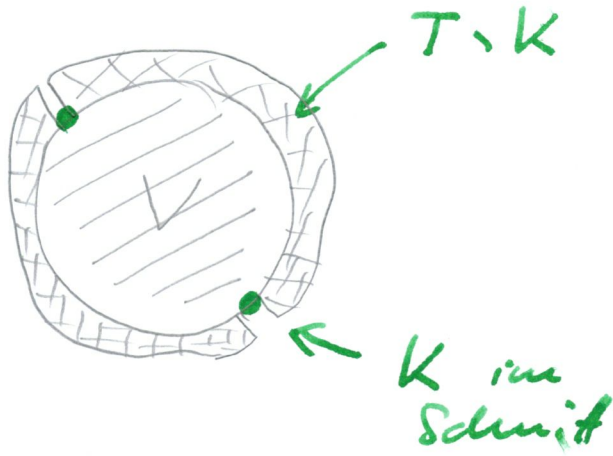
Wir wollen  $\pi_1(S^3, K)$  berechnen.



$K$  befindet sich auf der  $T = \partial V$  Oberfläche eines unverknoteten Volltorus  $V \subseteq S^3$ .

Sei nun  $V' := V \setminus K \rightarrow \cup T \setminus K \times [0, \varepsilon)$

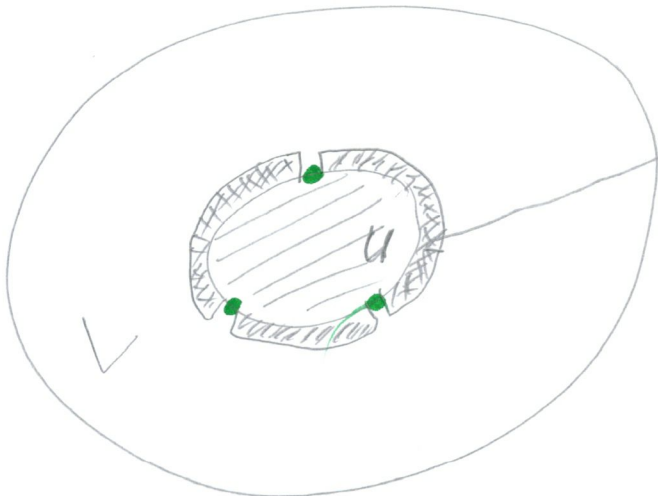
damit meinen wir,  
dass wir  $V \setminus K$   
etwas „verdicken“,  
so dass sich  
im Querschnitt durch  
eine Meridian-  
scheibe von  $V$   
folgendes Bild  
ergibt:



ebenso befindet sich  $K$  auf der Oberfläche des komplexen Volltorus  $U$ , den wir ähnlich ergänzen:

$$U' := U \setminus K \cup \mathbb{R} \times T \setminus K \approx [9\epsilon)$$

In der Aufsicht ergibt sich folgendes Bild eines "Querschnitts":



Nun haben wir:

-206-

$$S^3, K = U' \cup V'$$

$U' \cap V'$  ist wegzusammenhängend und ist homöomorph zu

~~$$T \setminus K \times (-\varepsilon, \varepsilon)$$~~

$$(T \setminus K) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \cong T \setminus K$$



Homotopie-Äquivalenz

Wir berechnen nun  $\pi_1(S^3, K, x_0)$  mit Hilfe des Satzes von Seifert-van Kampen.

$x_0$  sei auf  $T \setminus K$  gewählt.

- $U'$  besitzt eine Deformationsretraktion auf die Seele von  $U \cong S^1$ . Also ist  $\pi_1(U') \cong \langle [\beta] \rangle$

- $V'$  besitzt eine Deformationsretraktion auf die Seele von  $V \cong S^1$ .  
Also ist  $\pi_1(V') \cong \langle [\gamma] \rangle$ .

- $T \setminus K$  ist homöomorph zu einem  $S^1 \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Intervall}}}{I} \cong S^1$   
(Schneide  $T$  entlang  $K$  auf!)

$$\pi_1(T \setminus K, x_0) \cong \langle [\alpha] \rangle$$

Wie bildet nun die Inklusion  $i_{U'}: U' \hookrightarrow V'$  und  $i_{V'}: V' \hookrightarrow T \setminus K$  ab, d.h. wohin wird  $\alpha$  abgebildet.

Beobachte:

$$(i_{U'})_*([\alpha]) = [\beta] * [\beta]$$

$$(i_{V'})_*([\alpha]) = [\gamma] * [\gamma] * [\gamma]$$

Mit dem Satz von Seifert - van - -208-

Kampfer ergibt sich:

und obigem  
Lemma 3.5

$$\pi_1(S^3, k, *)$$

$$\langle x, y \mid x^2 = y^3 \rangle$$

$$\cong \langle [\beta], [\gamma] \mid [\beta]^2 = [\gamma]^3 \rangle$$

Übung: Für den Torusknoten  $T(p, q)$   
ergibt sich

$$\pi_1(S^3, T(p, q), *)$$

$$\cong \langle x, y \mid x^p = y^q \rangle$$

Beobachtung: Für  $p = \pm 1$  oder  
 $q = \pm 1$

ergibt sich die ~~triviale~~ freie  
abelsche Gruppe  $\mathbb{Z}$  - diese  
Torusknoten sind aber Linkknoten,  
also nicht überraschend.

Prop:  $\pi_1(S^3, T(2,3))$  ist nicht abelsch. -209-

Beweis: Wir bilden einen Homom.  $\varphi$  nach  $S_3$ :

$$\varphi : x \mapsto (12) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y \mapsto (123) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

und erhalten einen Homom.

$$\langle x, y \mid \rangle \xrightarrow{\varphi} S_3$$

↓ Quot.-  
epim.

$$\langle x, y \mid x^2 = y^3 \rangle \xrightarrow{\bar{\varphi}} \bar{S}_3$$

Dieses faktorisiert durch die Kleblattgruppe, weil in  $S_3$

gilt:  $(12)^2 = \text{id}$

$(123)^3 = \text{id}$

also insb.  $(12)^2 = (123)^3$ .

Außerdem ist  $\varphi$  surjektiv, und somit auch  $\bar{\varphi}$ , weil  $S_3$  von den beiden Elementen  $(12)$  und  $(123)$  erzeugt wird. □

Übrigens: In der Darstellung <sup>-210-</sup>

$$S^3 \subseteq \mathbb{C}^2 \quad \text{vom letzten}$$

Mal kann man den  
Torusknoten  $T(p, q)$  so  
darstellen:

$$S^1 \subseteq \mathbb{C}$$

$$\longrightarrow S^3$$

$$z \longmapsto \left( \frac{z^p}{\sqrt{2}}, \frac{z^q}{\sqrt{2}} \right)$$

Beispiel:

Eine Verschlingung  $L$  entstehe durch "Nebeneinanderstellen" eines Knotens  $k_1 \in B_1 \subseteq S^3$

und  $k_2 \in B_2 \subseteq S^3$ , wobei

$B_1, B_2 \subseteq S^3$  zwei Bälle sind mit

$$S^3 = B_1 \cup B_2, \quad B_1 \cap B_2 \cong S^2.$$

Übung: Dann ist

$$\pi_1(S^3, L) \cong \pi_1(S^3, k_1) * \pi_1(S^3, k_2).$$

Insbesondere ergibt sich für die 2-komp. Verschlingung

$$L = \bigcirc \bigcirc, \text{ dass}$$

$$\pi_1(S^3, L) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Die 2-komponentige Verschlingung auf Übungsblatt 10 ist also nicht diese triviale 2-komp. Verschl.



denn wir hatten gesehen:

-212-

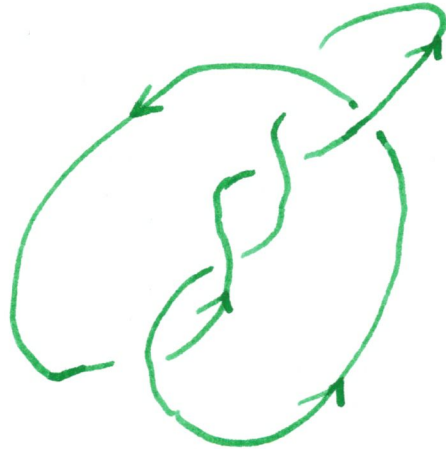
$$S^3 \setminus (k \cup l) \simeq T$$

mit  $T$  einem Torus!

$$\text{Also ist } \pi_1(S^3 \setminus (k \cup l)) \simeq \mathbb{Z}^2 \\ \neq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

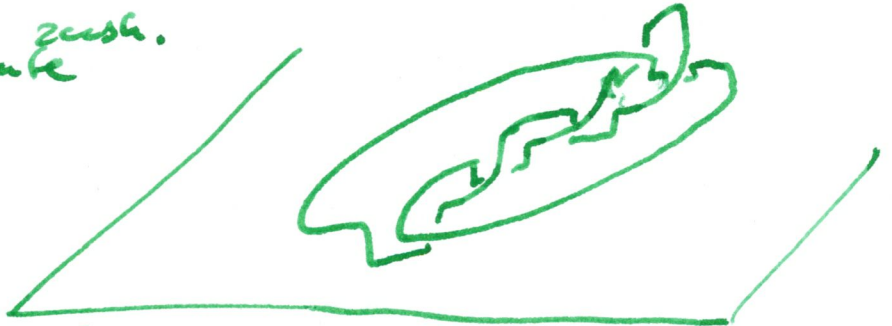
# Die Wirtinger-Präsentation

Sei  $D$  ein <sup>orientiertes</sup> Knotendiagramm eines Knotens  $K$ .



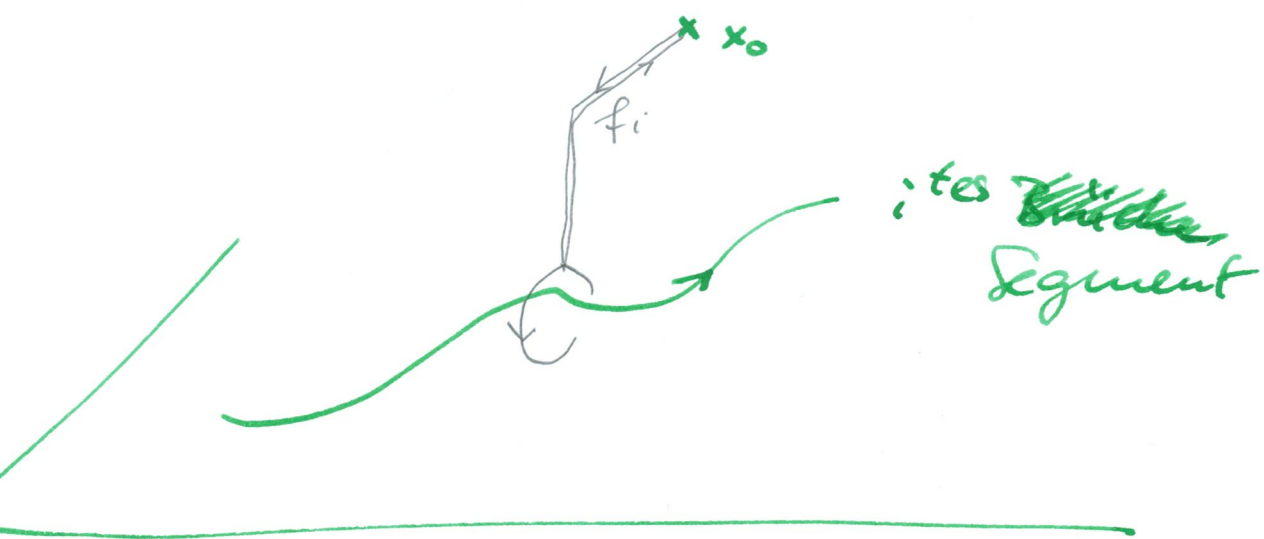
Sei  $x_0$  ein Punkt "über der Diagrammebene"  $(*)$  "über der Diagrammebene"  $x_0^*$

Wir nummerieren <sup>zuerst</sup> die ~~Brücken~~ <sup>Segmente</sup> von  $D$  von einem bel. Punkt aus in Or-Richtung durch.

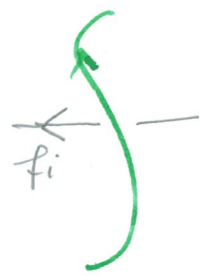


Zu jedem ~~Brücke~~ <sup>Segment</sup>  $i$  im Diagramm wählen wir eine Schlaufe  $\alpha_i$  um das ~~Brücke~~ <sup>Segment</sup> wie folgt:

$(*)$  oder "im Auge des Diagramm-Betrachters".



Im Diagramm drücken wir dies einfacher durch einen Pfeil aus, der das <sup>Segment</sup> ~~Brücke~~ unterläuft.



Je zwei solche Schlaufen desselben <sup>Segments</sup> ~~Brücke~~, die man auf diese Weise erhält, sind homotop.

An einer Kreuzung haben wir eine der folgenden beiden Situationen:

pos. Kreuzung

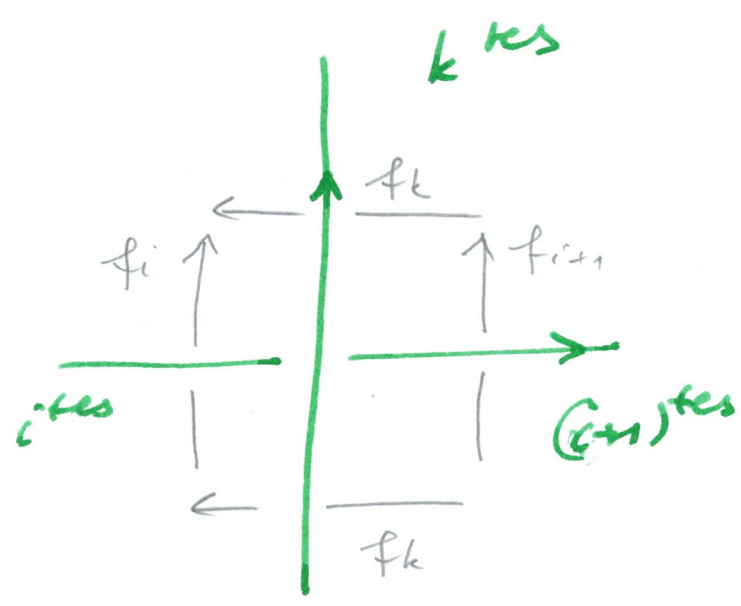
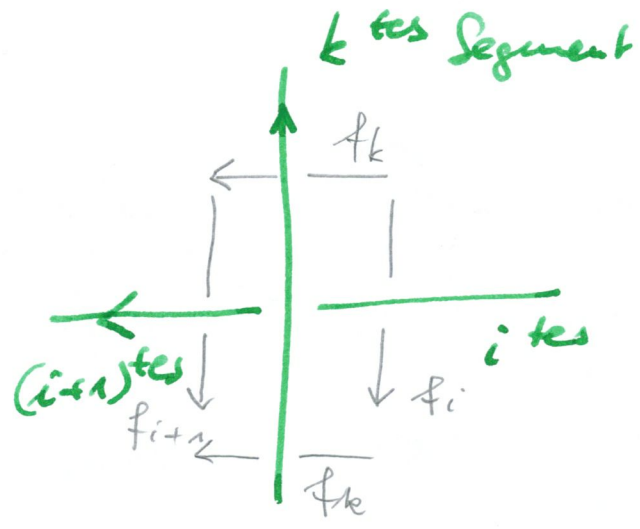
$R_i:$

$$x_k^{-1} x_i x_k = x_{i+1}$$

neg. Kreuzung.

$R_i:$

$$x_k x_i x_k^{-1} = x_{i+1}$$



Sei  $x_i = [f_i]$ .

Dann haben wir zwischen diesen Elementen offensichtlich Relationen.

Satz: Die Knotengruppe  $\pi_1(S^3, k)$  eines Knotens  $k$  mit Diagramm  $D$  hat mit obigem Algorithmus eine Präsentation

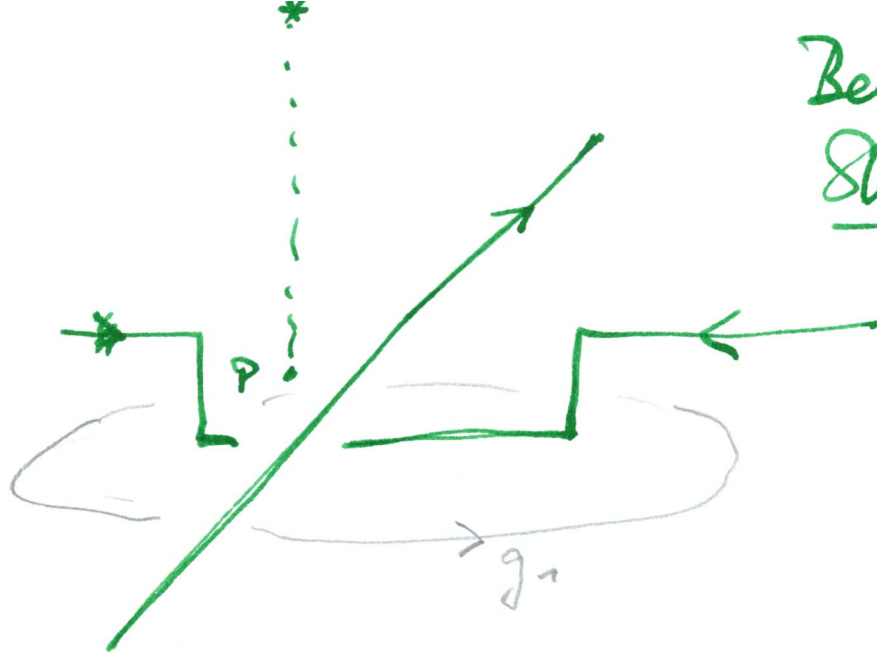
$$\pi_1(S^3, k) \cong \langle x_1, \dots, x_n \mid R_1, \dots, R_n \rangle.$$

Dabei kann eine beliebige der Relationen weggelassen werden, da sie sich als Konsequenz der übrigen ergibt.

Beweis: ~~Später~~.

Beweisskizze in Vorlesung,  
sonst siehe Skript Stefan Friedls.

Beweis-  
Skizze



$$U := \mathbb{R}^3 \setminus K \cap \{z \geq -1\}$$

$$V := \mathbb{R}^3 \setminus K \cap \{z \leq -1\}$$

$\cup$  Vertikales Segment  
von P zum  
Basis-Punkt  $\{*\}$

$$\pi_1(U) \cong \langle f_1, \dots, f_n \rangle$$

(freie Gruppe)

$\pi_1(V)$  ist trivial  $w =$



$$\pi_1(U \cap V) \cong \langle g_1, \dots, g_n \rangle$$

~~(freie Gruppe)~~

Beh. folgt aus Satz von Seifert-  
van-Kampen

Bild von  $g_i$  unter Einsetzung  
nach  $U$  liefert gerade ~~das~~ das  
Element

$$f_{k+1} f_i^{-1} f_k^{-1} f_i,$$

nach  $V$  das triviale Element.

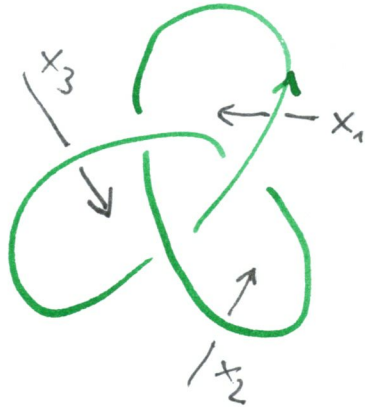
Also,

$$f_{k+1} f_i^{-1} f_k^{-1} f_i = 1$$

$$\Leftrightarrow f_{k+1} = f_i^{-1} f_k f_i$$

□

Beispiel:



Die Wirtinger-Präsentierung lautet hier:

$$\langle x_1, x_2, x_3 \mid \begin{array}{l} x_1^{-1} x_2 x_1 = x_3, \\ x_2^{-1} x_3 x_2 = x_1, \\ x_3^{-1} x_1 x_3 = x_2 \end{array} \rangle$$

~~Wir~~ Wir überzeugen uns, dass sich die letzte Relation aus den beiden anderen ergibt.

$$1^{\text{te}} \Leftrightarrow x_2 x_1 = x_1 x_3$$

$$2^{\text{te}} \Leftrightarrow x_3 x_2 = x_2 x_1$$

$$\text{Also auch } x_3 x_2 = x_1 x_3 \\ \Leftrightarrow 3^{\text{te}} \text{ Relation.}$$



Also ist obige Gruppe geg. durch

$$\langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^{-1} x_2 x_1 = x_3, \\ x_2^{-1} x_3 x_2 = x_1 \rangle$$

Übung

$$\cong \langle x_1, x_2 \mid x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1 x_2 = x_1 \rangle \\ = \langle x_1, x_2 \mid x_2 x_1 x_2 = x_1 x_2 x_1 \rangle$$

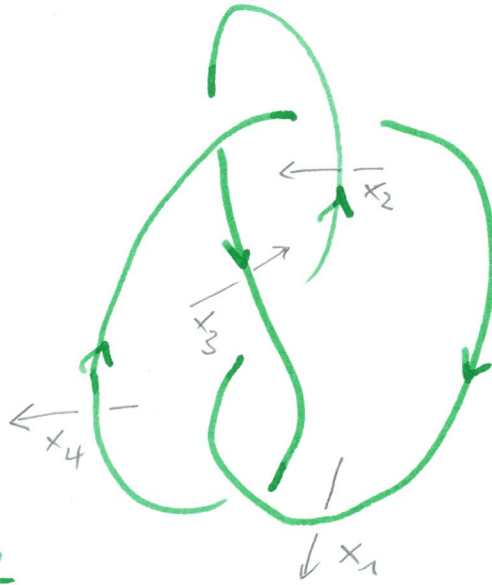
In den Übungen haben wir schon gesehen, dass diese ~~Präsentation~~ Gruppe isomorph zu

$$G_{2,3} := \langle a, b \mid a^2 = b^3 \rangle$$

ist. Dies drückt die Tatsache aus, dass der Klebblattknoten ~~isomorph~~ äquivalent zum Torusknoten  $T(2,3)$  ist, sowie obiger Bezeichnung, dass

$$\pi_1(S^3, T(2,3)) \cong G_{2,3}$$

Beispiel:



ergibt

Es ~~ergibt~~ sich die Wirfinger-Präsentierung

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \mid$$

$$x_3 x_2 x_3^{-1} = x_1,$$

$$x_4 x_2 x_4^{-1} = x_3,$$

$$x_1^{-1} x_3 x_1 = x_4 \rangle$$

Die 4. Relation wäre

$$x_2 x_4 x_2^{-1} = x_1$$

Übung: Zeige kombinatorisch, dass diese sich aus den übrigen Relationen ergibt.

Man kann nun weiter vereinfachen. Z.B. kann man  $x_4$  streichen aus der Liste der Erzeuger, wenn man  $x_4 = x_1^{-1} x_3 x_1$  benutzt und dies in die anderen Relationen einsetzt:

$$\begin{aligned}
 \dots &\cong \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_3 x_2 x_3^{-1} = x_1, \\
 &\quad x_1^{-1} x_3 x_1 x_2 x_1^{-1} x_3^{-1} x_1 = x_3 \rangle \\
 &\cong \langle x_1, \overset{x_2}{\sqrt{x_3}} \mid x_2 = x_3^{-1} x_1 x_3, \dots \rangle \\
 &\cong \langle x_1, x_3 \mid x_1^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} x_1 x_3 x_1^{-1} x_3^{-1} x_1 = x_3 \rangle
 \end{aligned}$$

Übung: Diese Gruppe ist nicht abelsch.

# Algebraisches Intermezzo:

Sei  $G$  eine Gruppe.

Seien  $x, y \in G$ .  $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$ .

Die Kommutator-Untergruppe von  $G$  ist definiert durch die Menge der Elemente, die sich

als Produkte von Kommutatoren schreiben lassen:

$$\{ [x_1, y_1] \cdot \dots \cdot [x_n, y_n] \mid x_i, y_i \in G, n \text{ beliebig} \}$$

Übung: Dies ist eine Untergruppe von  $G$ , die ~~also~~ mit  $[G, G]$  bezeichnet wird.

Übung:  $[G, G]$  ist normal in  $G$ .

Def:  $G/[G, G]$  heißt die Abelianisierung von  $G$ , geschrieben  $G_{ab}$ .

Übung:  $G_{ab}$  ist abelsch. -220-

Die Abelianisierung erfüllt folgende universelle Eigenschaft:

Lemma: Sei  $G \xrightarrow{\alpha} A$   
ein Homom. von  $G$ , ~~Abelsch~~  
~~abelsch~~ und sei  $A$  abelsch.

Dann gibt es genau einen  
Hom  $\bar{\alpha}: G_{ab} \rightarrow A$ , so  
dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\alpha} & A \\ \downarrow & \nearrow \bar{\alpha} & \\ G_{ab} & & \end{array} \quad \text{kommutiert.}$$

Beweis: Übung.

Man kann auch zeigen, dass  
 $G_{ab}$  bis auf eindeutige Isom.  
durch diese Eigenschaft bestimmt  
ist ...

-221-

Übung: Hat  $G$  eine Präsentation

$$G \cong \langle g_1, \dots, g_n \mid R_1, \dots, R_m \rangle,$$

so hat  $G_{ab}$  eine Präsentation gegeben durch

$$G_{ab} \cong \langle g_1, \dots, g_n \mid R_1, \dots, R_m, [g_i, g_j] = 1, \\ i, j = 1, \dots, n \rangle$$

Korollar (der Wirtinger - Präsentation)

Ist  $K$  ein Knoten, so ist

$$\pi_1(S^3, K)_{ab} \cong \mathbb{Z}$$

Beweis: Durch Zufügen der Kommutatoren zu den Relationen ergibt sich aus jeder Relation

$$R_i \quad x_k x_i x_k^{-1} = x_{i+1} \\ \text{oder} \\ x_k^{-1} x_i x_k = x_{i+1}$$

die Relation

$$R_i' \quad x_i = x_{i+1} \quad .$$



-222-

Nun kann man sich aufgrund  
obiger Beobachtungen die Frage  
stellen, ob jeder nicht-triviale  
Knoten eine nicht-abelsche  
Fundamentalgruppe hat.

# 6. Dehn'sches Lemma und Anwendungen

---

Folgender Satz wurde 1910 von Max Dehn formuliert ("Dehn'sches Lemma":)

6.1.

Satz: Sei  $f: D^2 \rightarrow M^3$

eine stetige (P.L. oder glatte) Abbildung einer Scheibe  $D^2$  in eine 3-dim'le (P.L. oder glatte) Mannigfaltigkeit.

Desweiteren befinden sich auf  $D^2$  keine "Singularitäten" von  $f$  im folgenden Sinn:

~~Es gibt  $x, y \in D^2$~~  Sind  $x, y \in D^2$  und ist  $f(x) = f(y)$  mit, dann gilt  $x, y \notin \partial D^2$ .

Dann gibt es eine Einbettung  $g: D^2 \rightarrow M^3$  mit  $f|_{\partial D^2} = g|_{\partial D^2}$ .



1929 fand Kneser einen Fehler<sup>-224</sup>  
 in Dehns Beweis. Der Satz  
 wurde erst 1957 von Papa-  
 kyriakopoulos bewiesen, zusam-  
 men mit folgender Verall-  
 gemeinerung

Satz 6.2 ("Schleifensatz")  
 (engl. "Loop Theorem")

Ist  $M$  eine 3-Mannigfaltig-  
 keit ~~und  $\partial M$~~  mit Rand  $\partial M$   
 und ist

$$\pi_1(\partial M) \rightarrow \pi_1(M)$$

nicht injektiv, dann gibt  
 es eine eingebettete Scheibe  ~~$D$~~

$$i: D \rightarrow M$$

so dass  $i(\partial D) \subseteq \partial M$ ,  $i^{-1}(\partial M) = \partial D$   
 und  $i(\partial D)$  repräsentiert ein Element  
 in  $\pi_1(M)$ , das nicht-trivial in  
 $\pi_1(M)$  ist.

Genauer genommen ist dies eine  
Verallgemeinerung folgenden  
Korollars des Dehn'schen Lemmas:

Korollar 6.3

Ist  $c: S^1 \rightarrow M$  eine  
Einkbettung, so dass  $c$   
nullhomotop in  $M$  ist.

Dann gibt es eine eingebettete  
Scheibe  $g: D^2 \rightarrow M$  mit

$g|_{\partial D^2} = c$  und so dass

$g^{-1}(\partial M) = \partial D^2$  ist.

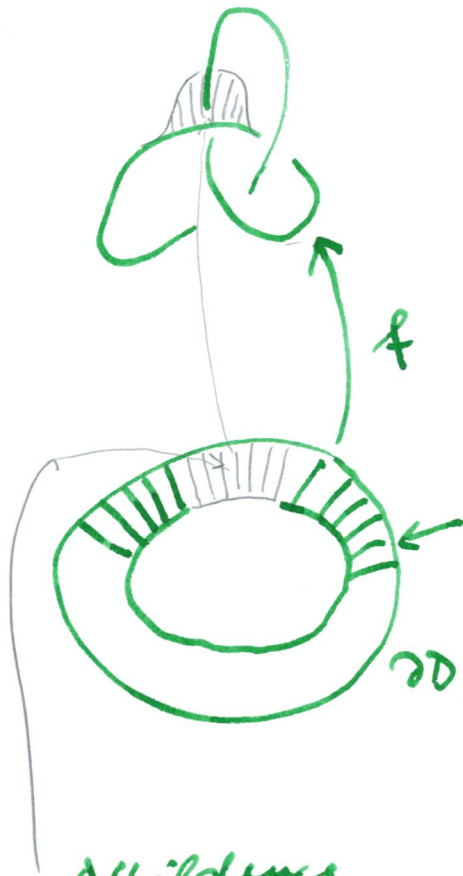
---

Wir benutzen diese fundamentalen  
Sätze im Folgenden ohne Beweis.

Beweis-Skizze: siehe Appendix  
von [Rolfen].

Zemerkung:

Denn die "Keine-Singularitäten-Annahme" ist das Delusche Lemma falsch:



f/∂D = Kleeblatt-Knoten

Abbildung im Kreisring konstant auf grünen "Strahlen".

Abbildung auf grauen Strahlen wie skizziert.

Die Abbildung im inneren Rand des Kreisringes ist ein triviales Knoten, der eine Scheibe beandet.

Aber: Der Kleeblattknoten beandet keine Scheibe!

Wir haben gesehen, dass die Zuordnung

$$K \xrightarrow{\quad} \pi_1(S^3, K)$$

Äq.-kl.  
eines  
Knotens

nicht injektiv ist. Andererseits gilt:

Satz 6.4

Für Knoten  $K$  ist der triviale Knoten genau dann, wenn  $\pi_1(S^3, K) \cong \mathbb{Z}$ .

Beweis des Satzes 6.4:

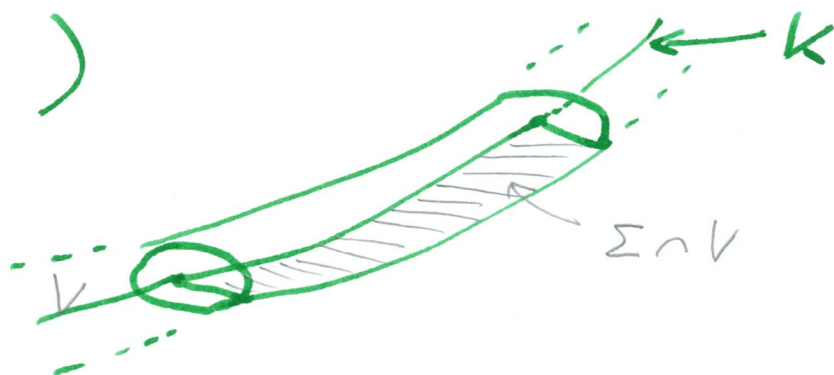
Angenommen,  $\pi_1(S^3, K) \cong \mathbb{Z}$ .

Sei  $V$  ein Volltorus um  $K$ .

Sei  $\Sigma$  eine Seifert-Fläche von  $K$ , ~~so~~ so dass

$$\Sigma \cap V \cong S^1 \times I$$

ein Kreisring ist. (Dies kann man bei gegebenem  $\Sigma$  bewerkstelligen, indem man  $V$  klein genug macht)



Wir greifen etwas vorweg:

Die Longitude  $K' := \Sigma \cap \partial V$  ist in der Abelianisierung

$$\pi_1(S^3, K)_{ab} \cong \mathbb{Z}$$

immer das Null-Element.

Nichttriviale ist

-229-

$$S^3, K \cong S^3, \dot{V}$$

(Tubenumgebung und Def-Äq. auf  
Rand von  $V, K \cong \mathbb{Z}$ , Identität  
außerhalb.)

Also ist <sup>genauer:</sup> ~~Wähle~~ einen Basis-  
Punkt auf  $K' \subseteq \partial V \cong \mathbb{Z}$ , sowie  
eine Abb  $c: S^1 \rightarrow \partial V$  mit  
Bild  $K'$ )

$$0 = [K'] \text{ ~~triviale~~ } \begin{matrix} K' \subseteq \partial V \\ \subseteq S^3, \dot{V} \end{matrix}$$

in  $\pi_1(S^3, \dot{V})$  ab.

Aber  $\pi_1(S^3, \dot{V}) \cong \mathbb{Z}$  ist schon  
abelsch, also

$$0 = [K'] \in \pi_1(S^3, \dot{V})$$

Nach dem Korollar zum Dehn-  
schen Lemma existiert eine eingeb.  
Scheibe  $D \hookrightarrow S^3, \dot{V}$ , sodass  
 $\partial D = K'$  und  $D \cap \partial(S^3, \dot{V}) = \partial D$ .

Dann ist aber  
 $D \cup \Sigma \cap V$

-230-



ebenfalls eine Scheibe,  
 die  $K$  berührt. Also ist  
 $K$  der triviale Knoten.  $\square$

Mit dem Schließensatz beweist  
 man ähnlich den folgenden  
 allgemeinen

Satz 6.5: Sei  $K$  ein nicht-  
 trivialer Knoten. Sei  $V$  eine  
 Vollhorn-Umgebung von  $K$ .

Dann ist die ~~Abbildung~~ ~~von~~  
 der ~~Einbettung~~

$$\partial V \hookrightarrow S^3 \setminus \overset{\circ}{V}$$

induzierte Abbildung

~~$$\pi_1(\partial V) \rightarrow \pi_1(S^3 \setminus \overset{\circ}{V})$$~~

$$\pi_1(\partial V) \rightarrow \pi_1(S^3 \setminus \overset{\circ}{V})$$

$$\cong \pi_1(S^3 \setminus K)$$

injektiv.

Zur Information:

Whitten und Gonzales-Acuña  
haben bewiesen:

$K$  und  $L$  prime Knoten,

~~Dann sind~~

so dass  $\pi_1(S^3, K) \cong \pi_1(S^3, L)$ .

Dann sind  $S^3, K$  und  $S^3, L$   
homöomorph.

Gordon-Zwecke haben gezeigt:

Sind  $K, L$  zwei Knoten, und  
gibt es einen Homöomorphismus

$$S^3, K \rightarrow S^3, L,$$

so sind  $K$  und  $L$  äquivalent  
(bis auf Spiegelung).

Zusammen:

Auf der Klasse der prime Knoten

ist  $K \mapsto \pi_1(S^3, K)$   
Isomorphietyp

injetiv. <sup>Äquiv. kl. bis auf Spiegelung</sup>



Übung: Der Satz von Whitney<sup>-23-</sup>  
und Gonzales-~~de~~ Acuña  
ist nicht wahr für nicht-  
prime Knoten.

Der Satz von Gordon-Zwecke ist  
falsch für Verschlingungen:



und



haben homöomorphe Komple-  
mente, sind aber als Ver-  
schlingungen verschieden.

# Ein algebraischer Satz 6.7

-255-

Seien  $G_0, G_1$  und  $G_2$  Gruppen.

Sind  $i_1: G_0 \rightarrow G_1$

$i_2: G_0 \rightarrow G_2$

zwei injektive Gruppenhomo-  
morphisamen, dann sind die  
beiden Homomorphisamen

$j_1: G_1 \rightarrow G_1 *_{G_0} G_2$

$j_2: G_2 \rightarrow G_1 *_{G_0} G_2$

in der Definition des amalgamierten  
Produkts ebenfalls injektiv.

Ohne Beweis.

Beobachtung: Ohne die geforderte  
Injektivität ist der Satz falsch.

Beispiele?

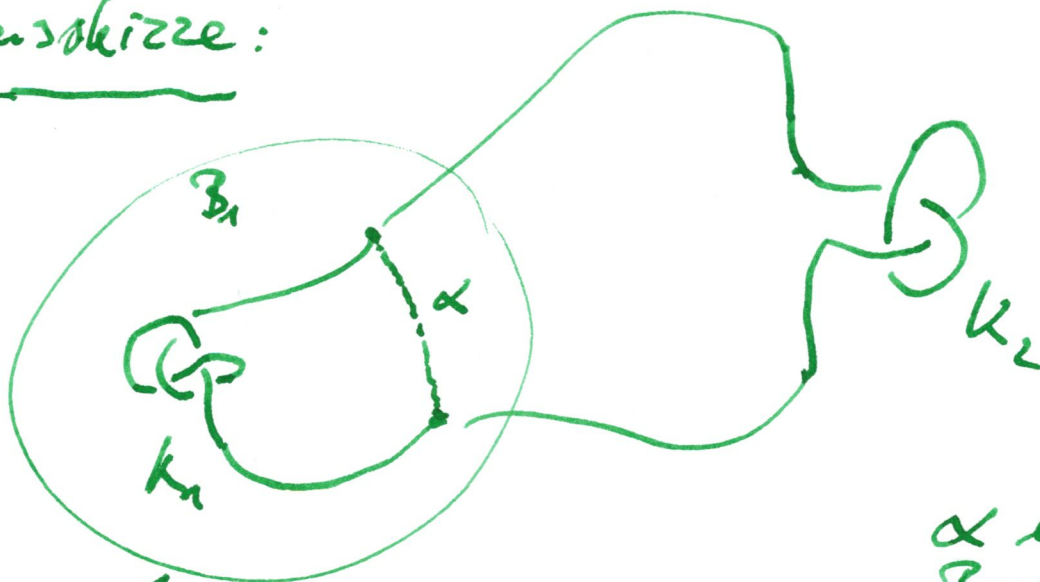
Anwendungen, zusammen mit 2.4-  
 Dehnungssatz Lemma bzw. Schlaufen-  
 satz:

Satz 6.8

Sind  $k_1, k_2$  zwei Knoten, und ist  
 $k = k_1 + k_2$  der Linkknoten, so  
 sind bereits  $k_1$  und  $k_2$  Linkknoten

( $\exists$  keine additiven Inverse nicht-  
 triv. Knoten bzgl. + )

Beweisskizze:



$B_2 =$  Komplement  
 eines  
 Balls,  
 der offen  
 in  
 $B_1$  enthalten  
 ist.

$\Sigma$  eingebettete  
 Sphäre

$\alpha$  ein  
 Bogen zwischen  
 den beiden  
 Schnittpunkten  
 von  
 $k \cap \Sigma$ .

-235-

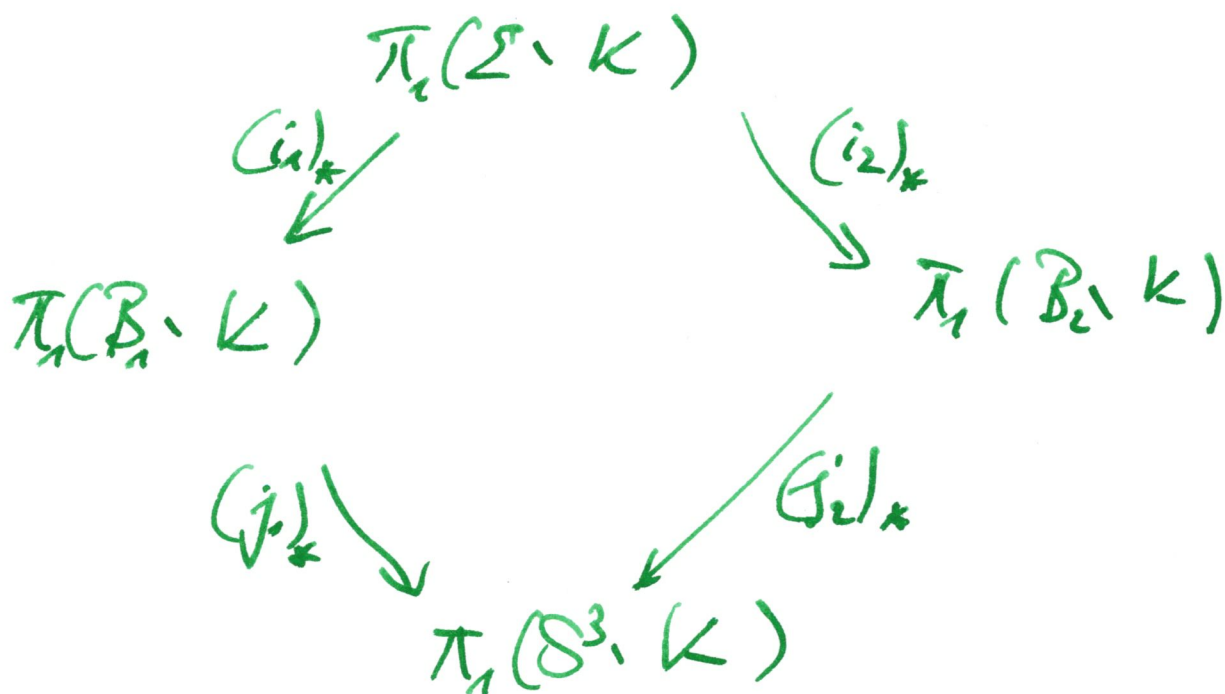
Übung:  $\pi_1(\mathbb{B}_1 \setminus K) \cong \pi_1(S^3 \setminus K_1)$

$$\pi_1(\mathbb{B}_2 \setminus K) \cong \pi_1(S^3 \setminus K_1)$$

(Erhalte  $K_1$  aus  $K \cap \mathbb{B}_1$  durch  
Zusammenfügen der Schnittpunkte  
mittels  $\alpha$ ).

$$\pi_1(\Sigma \setminus K) \cong \mathbb{Z}$$

Wir haben



und  $\pi_1(S^3 \setminus K) \cong \pi_1(S^3 \setminus K_1) * \pi_1(S^1 \setminus K_1)$   
 $\pi_1(\Sigma \setminus K)$

$(i_1)_*$  und  $(i_2)_*$  sind beide surjektiv.  
Alg. Satz  $\Rightarrow (j_1)_*$  und  $(j_2)_*$  sind  
injektiv.

ist nun  $k$  dertriviale Knoten, -236-  
so ist  $\pi_1(S^3, k) \cong \mathbb{Z}$  abelsch.

Als Untergruppen müssen dann

$$\text{auch } (j_1)_* (\pi_1(B_1, k)) \\ (j_2)_* (\pi_1(B_2, k))$$

abelsch sein, also  $\pi_1(B_1, k)$

und  $\pi_1(B_2, k)$ , also auch

$\pi_1(S^3, k_1)$  und  $\pi_1(S^3, k_2)$ .

Wegen obigem Satz 6.4 ~~ist~~ sind  
~~also~~ also  $k_1$  <sup>und seinem</sup>  
<sup>Korollar</sup>  
<sup>(Vorlesung)</sup>  
und  $k_2$  die trivialen Knoten.

□

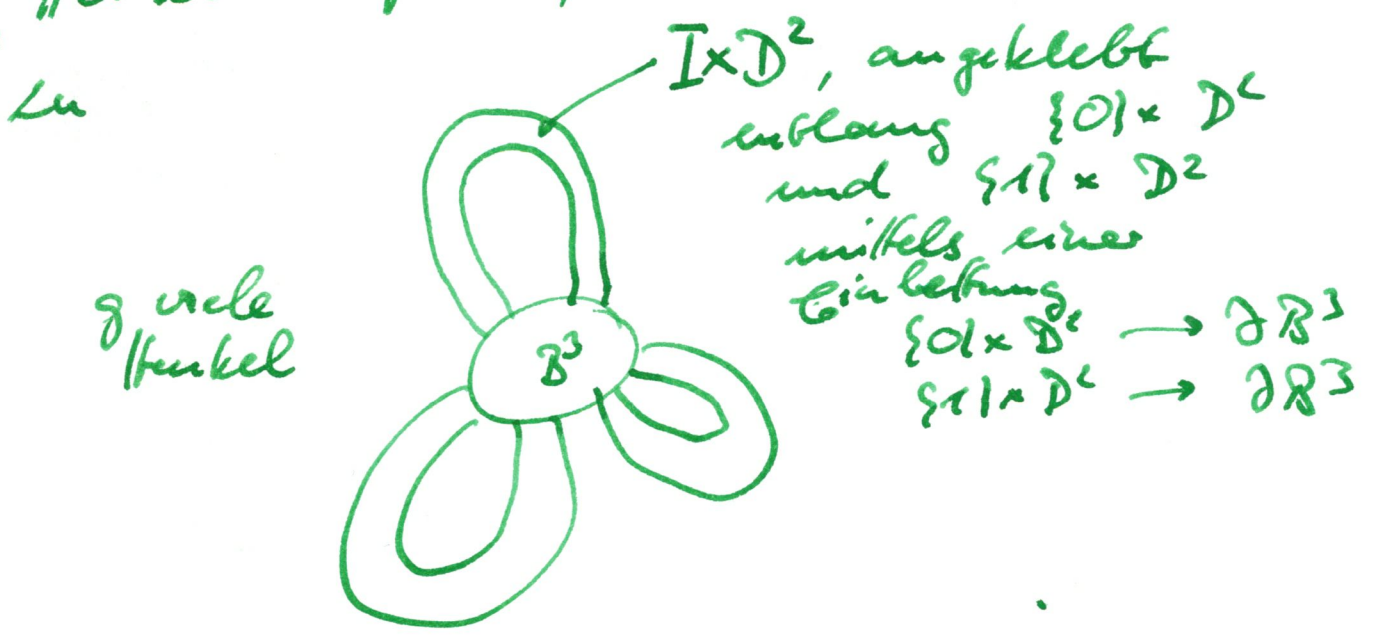
# Satz 6.9. "Volltorus-Satz"

Ist  $i: T \hookrightarrow S^3$  eine Einbettung eines Torus, so bewirkt  $i(T)$  einen in  $S^3$  eingebetteten abzuschlossenen Volltorus.

Beweis: Übungsaufgabe\*  
(Benutze Dehnungslemma)



Eine 3-dim Mfkt.  $M$  heißt "Kreuzkörper", wenn  $M$  homöomorph zu



Beobachtung:  $\pi_1(M) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}$

Anzahl der  $\mathbb{Z}$  = Anzahl der angeheft. "Henkel".

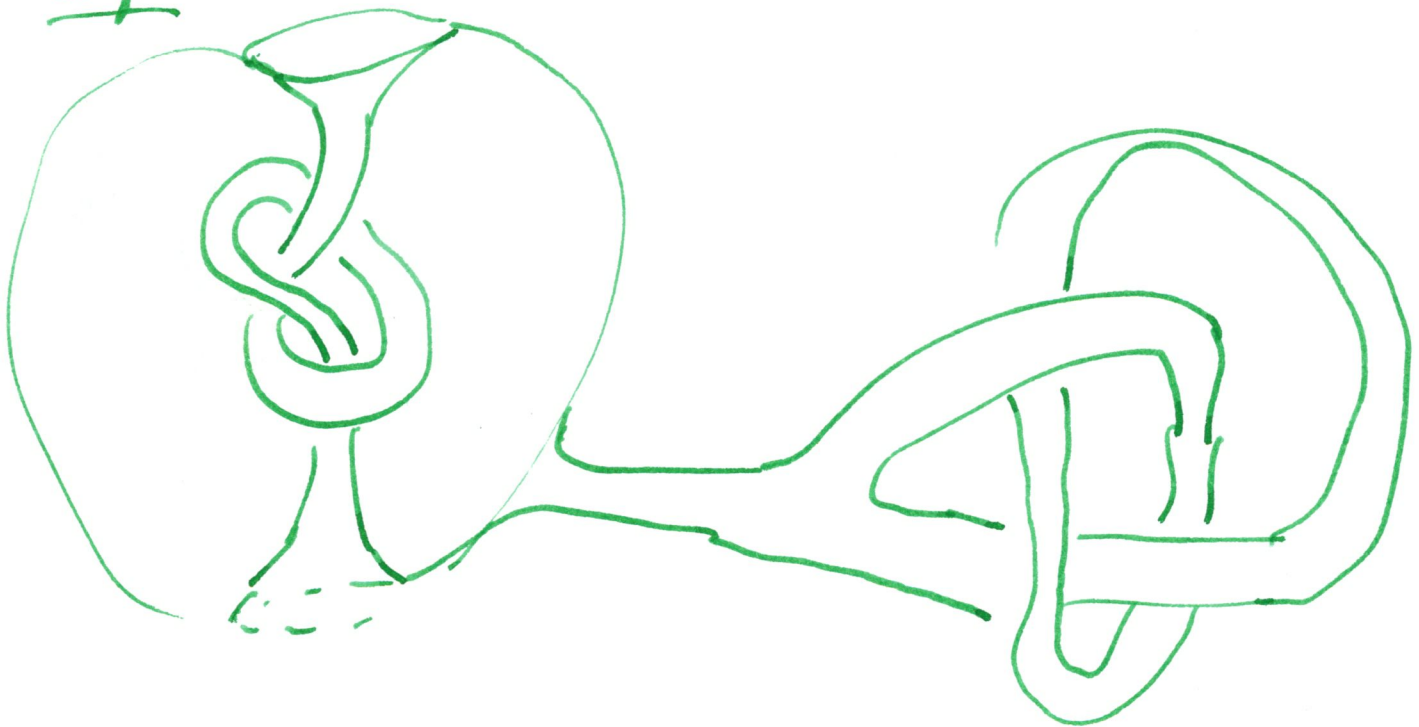
Übung: Ein Volltorus ist ein Kreuzkörper von Geschlecht 1.

Beobachtung:  $\mathcal{M} \cong \Sigma_g$  . -238-

Bemerkung: Eingebettete Flächen

$\Sigma_g \hookrightarrow S^3$  von höherer  
Geschlecht beranden i. A. keine  
Hankelkörper auf einer der beiden  
Seiten von  $S^3, \Sigma$  .

Bsp:

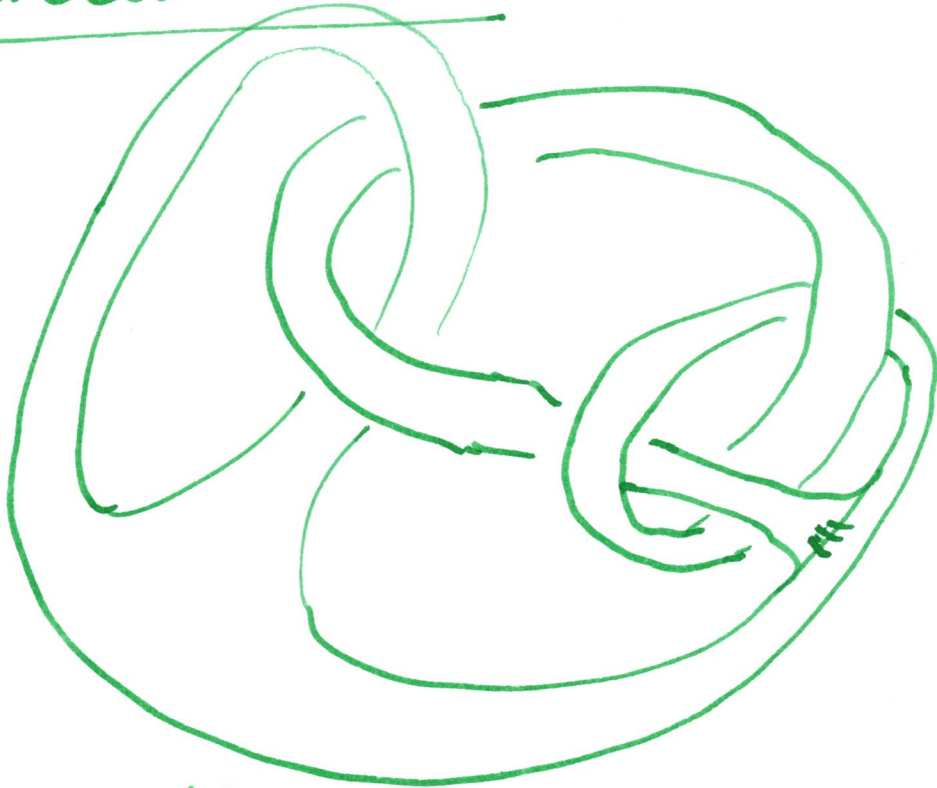


denen beide Komplemente  
haben Fundamentalgruppe

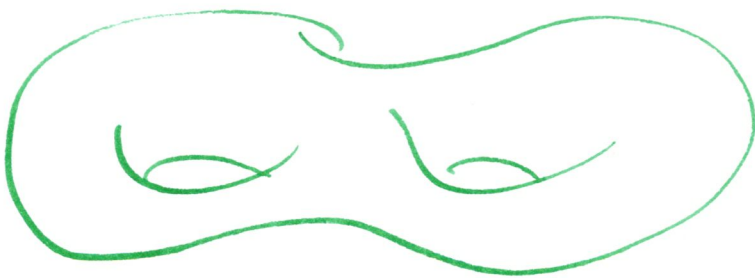
$\neq \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$  (freie Gruppe) .

(Beide Komplemente haben  
Fund-Gruppe  $\cong \mathbb{Z} * G_{3,1}$ ,  
mit  $G_{3,1} = \pi_1(S^3 - \text{Knoten } 3_1)$  )

Interessanterweise:



wie  
 (Fläche von Geschlecht 2)  
 verandert auf beiden Seiten  
 Hantelkörper. (Nicht offensichtlich!)



verandert  
 auf beiden  
 Seiten  
 Hantelkörper  
 (offensichtlich  
 zumindest für  
 eine Seite).



Wir haben gesagt, dass ein  
 Knoten  $k \in S^3$  nicht-trivial  
 in einem Vollraum  $V \subseteq S^3$   
 eingebettet ist, wenn

$k$  nicht in einem Ball  $B \subseteq V$   
 enthalten ist, (und nicht "stop  
 zur Stelle" ist)

Man kann zeigen, dass die folgenden  
 drei Aussagen äquivalent sind:

(i)  $k$  liegt in keinem Ball  
 $B \subseteq V$

(ii) Es gibt keine Meridianscheibe  
 $(D, \partial D) \subseteq (V, \partial V)$ ,  
 so dass  $k \in V \setminus D$

(iii)  $\pi_1(\partial V) \hookrightarrow \pi_1(V \setminus k)$   
 ist injektiv.

Die Äquivalenz von (i) und (iii)  
 benutzt das Dehn'sche Lemma.

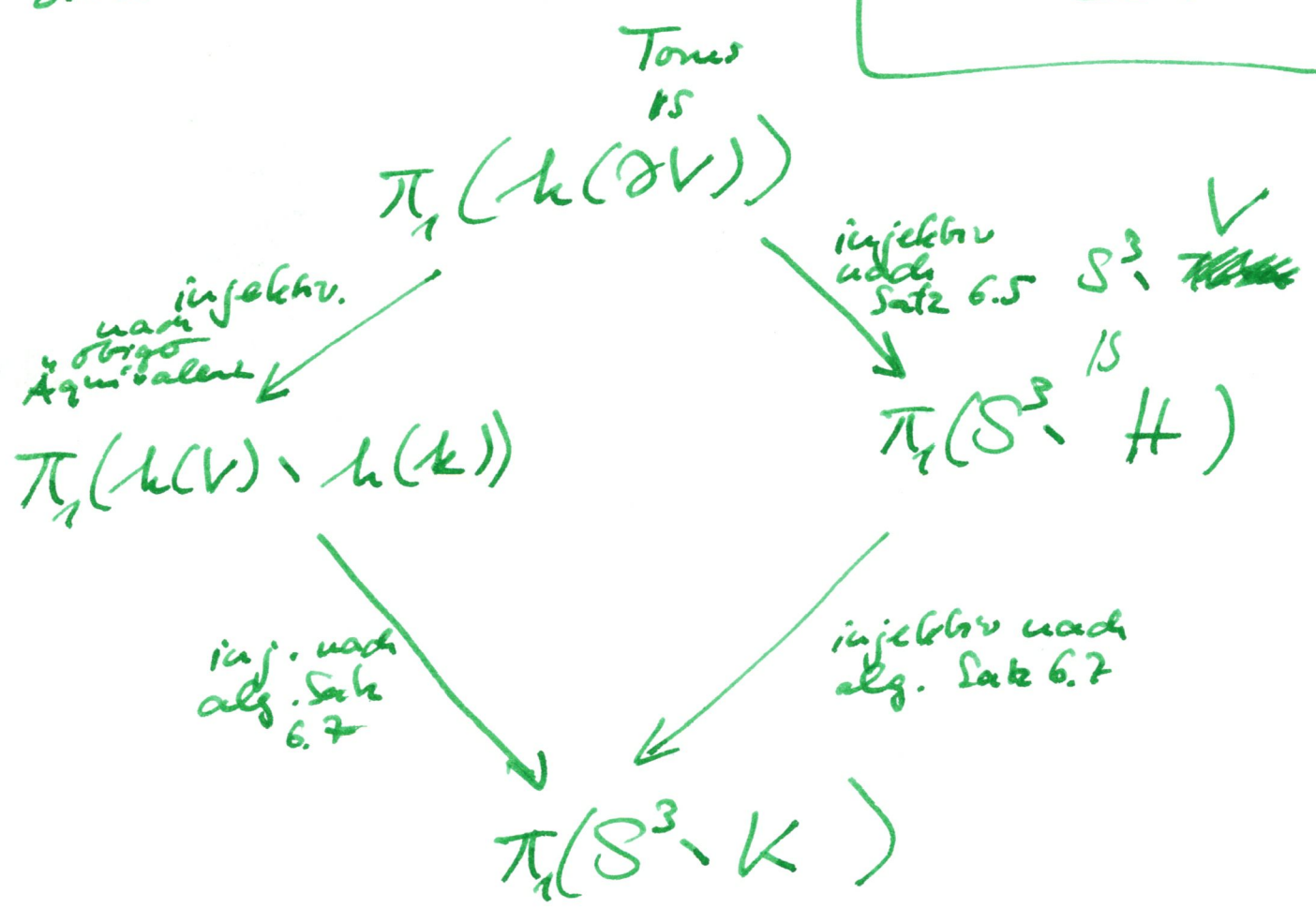
(i)  $\Leftrightarrow$  (ii) war weiter oben schon  
 erwähnt.

Sei nun  $K = h(k)$  das Bild von  $k$  unter einer Einbettung  $h: V \rightarrow S^3$ .

Sei  $H$  das Bild der Seele von  $V$ .

Dann haben wir folgende Situation in  $\pi_1$ :

Sei  $H$  nicht-trivial



Nach algebraischem Satz 6.7 ist also  $\pi_1(S^3, H)$  in  $\pi_1(S^3, K)$  eingebettet. Also: "Satelliten können nicht einfacher als ihre Begleiter sein."

Wir haben den Satz von Gordon-Knecke erwähnt, der in einer Version lautet:

Zwei prime Knoten  $K, L$  sind äquivalent (ohne Unterscheidung zwischen Spiegelbildern) genau dann, wenn  $\pi_1(S^3, K) \cong \pi_1(S^3, L)$ .

Man könnte nun meinen, damit sei die Klassifikation von primen Knoten "erledigt".

Aber: Drei "Dehnsche Probleme" über (endlich) präsentierte Gruppen:

(1.) Wortproblem: In  $\langle \underline{X} \mid \underline{R} \rangle$  seien zwei Elemente <sup>Erzeuger-Menge</sup>  $w_1, w_2$  <sup>Relationen-Menge</sup> durch Wörter  $w_1, w_2 \in \langle \underline{X} \mid - \rangle$  repräsentiert. Wann ist  $w := w_1 w_2^{-1} \in \langle \underline{R} \rangle \triangleleft \langle \underline{X}, - \rangle$   $\Leftrightarrow w_1 = w_2$  in  $\langle \underline{X} \mid \underline{R} \rangle$

Das Wort-Problem ist im 243-  
Allgemeinen algorithmisch unlösbar  
(Satz von Novikov-Baume).

(2.) Konjugations-Problem:

Sind zwei Elemente  
 $w_1, w_2$  konjugiert in

$$G = \langle X | R \rangle ?$$

Wortproblem ist Spezialfall  
für  $w_2 = 1$ .

(3.) Isomorphie-Problem:

Gegeben zwei Gruppen  
 $G_1, G_2$  mit Präsentationen

$$G_1 = \langle X_1 | R_1 \rangle$$

$$G_2 = \langle X_2 | R_2 \rangle$$

Sind  $G_1$  und  $G_2$  isomorph?

Ebenfalls: I.A. algorithmisch  
unlösbar.

---

Daher möchte man lieber mit  
„abelschen Invarianten“ arbeiten.