

VI Das Alexander - Polynom

-244-

1. Vorbereitungen

Definition: Sei X ein ^{wegzsh.} top. Raum.

Dann bezeichnen wir mit

$$H_1(X) := \pi_1(X, x_0) / [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$$

$$= \pi_1(X, x_0)_{ab}$$

die Abelianisierung von $\pi_1(X, x_0)$.

Man bezeichnet $H_1(X)$ auch als
"erste Homologiegruppe" in der

alg. Topologie [cf. Vorlesung
von Stefan Friedl im SS 2013],

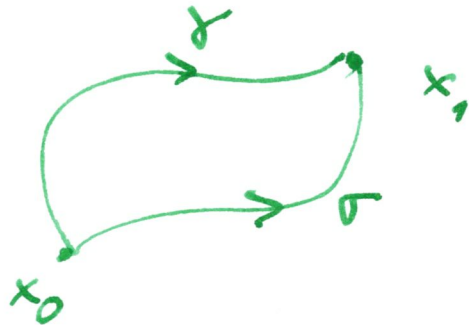
~~die~~ und erhält diese Gruppe
dort anders. Nach einem

Satz von Hurewicz stimmen
aber diese beiden Definitionen
überein.

Beobachtung:

$H_1(X)$ hängt nicht von der Wahl des Basispunktes ab.

Beweis:



Wir haben gesehen:

$$I_\gamma: \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x_1)$$

$$I_\sigma$$

sind Isomorphismen, die i. A. vom Weg abhängen. Gesehen

$$I_\sigma^{-1} \circ I_\gamma \in \text{Aut}(\pi_1(X, x_0))$$

ist Konjugation in $\pi_1(X, x_0)$ mit dem Element

$$[\sigma * \gamma] \in \pi_1(X, x_0).$$

Nach der Abelianisierung werden aber Konjugationen zu Identitäten.

Vorbereitendes zu Flächen

Erinnerung:
kompakt
und ohne
Rand
↑

Proposition: 1.1

Sei Σ eine orientierbare geschl.
Fläche von Geschlecht $g \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Dann ist

$$\pi_1(\Sigma) \cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid$$

$$[a_1, b_1][a_2, b_2] \dots [a_g, b_g] \rangle$$

↑
Produkt von
Kommutatoren.

und $\pi_1(\Sigma_{ab}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$

Korollar: Für $g \neq g'$ ist Σ_g
nicht homöomorph zu $\Sigma_{g'}$
(was wir ~~aber~~ ^{früher} nicht bewiesen,
sondern nur ohne Beweis
behauptet hatten.)

1.2
Proposition:

-247-

Sei Σ eine orientierbare kompakte Fläche mit nur einer Randkomponente ($\cong S^1$). Dann ist

$$\Sigma \cong \underbrace{\vee S^1}_{\text{viele}} \quad \text{und insbesondere}$$

$$\begin{aligned} \pi_1(\Sigma) &\cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid - \rangle \\ &= \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{2g \text{ viele}} \end{aligned}$$

sowie $\pi_1(\Sigma)_{ab} \cong \mathbb{Z}^{2g}$.

Beweisskizze:

Graphisch für Torus:

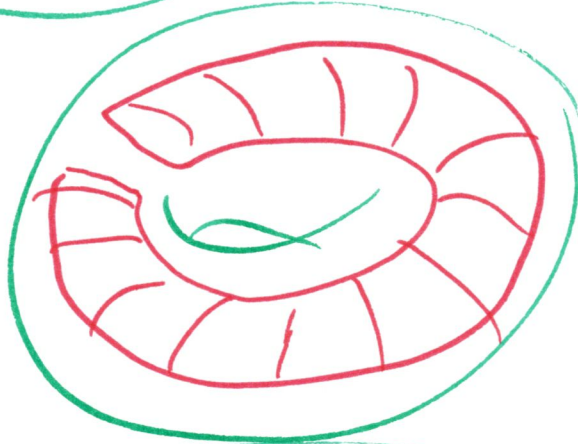
$$\text{Sei } D^2 \hookrightarrow T \quad \uparrow \text{Torus}$$

eine Scheibe. Machen wir D^2 größer, so sehen wir,

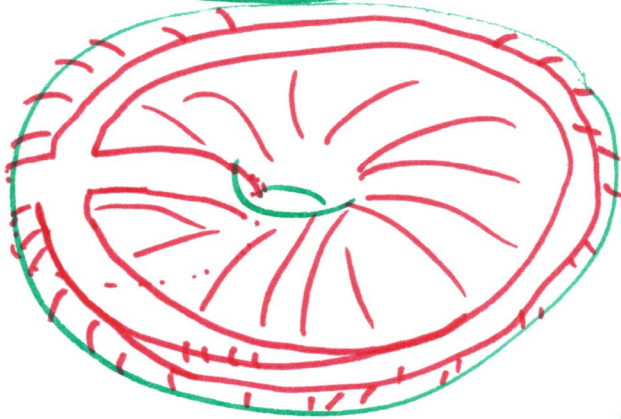
dass $T \setminus D^2 \cong \mathbb{Z} S^1 \vee S^1$.



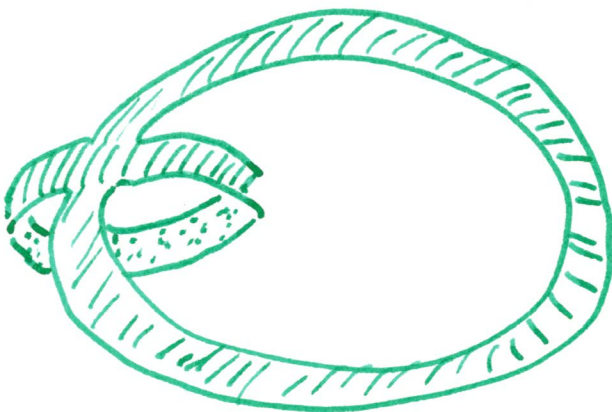
|||



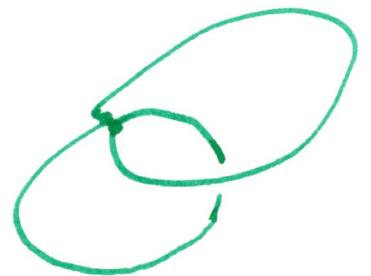
|||



Das Komplement dieser "großen" Scheibe sieht so aus:



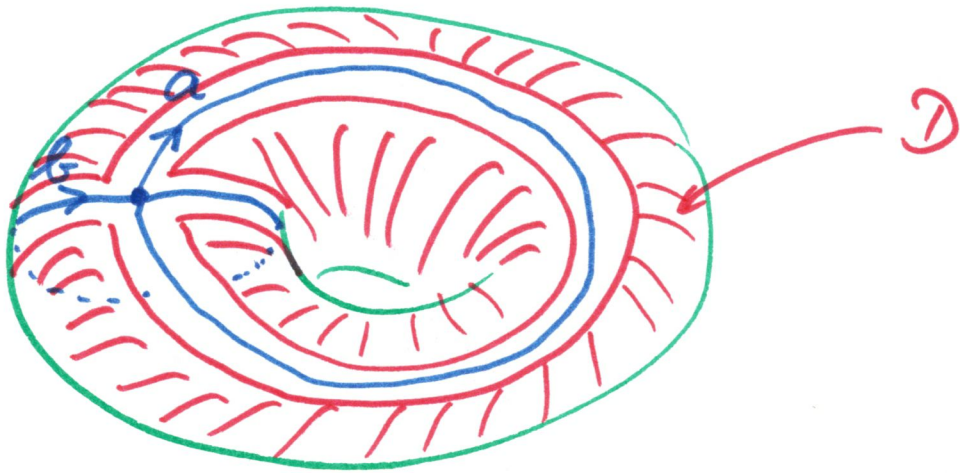
|||



= $S^1 \vee S^1$

Also ist $\pi_1(T^2 \setminus D^2) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

mit Erzeugern repr. durch:



Mit dem Satz von Seifert-
van Kampen sieht man
nun

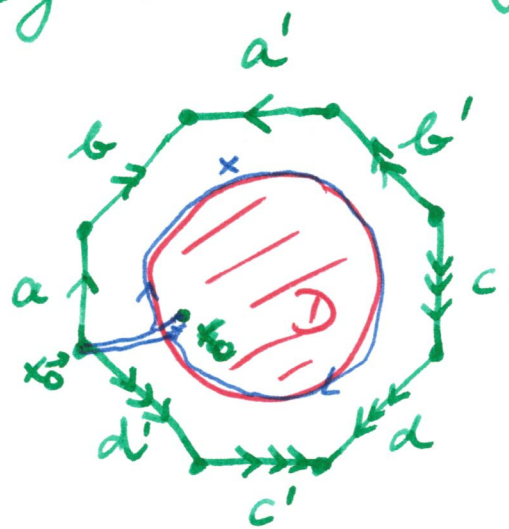
$$\pi_1(T^2) \cong \langle a, b \mid [a, b] \rangle$$

$$\cong \mathbb{Z}^2$$

weil die Kurve, die durch
den Rand von D repräsentiert
wird, in $\pi_1(T^2 \setminus \text{etw. kleine Scheibe } D')$
beschrieben ist durch einen
Weg homotop zu $a * b * \bar{a} * \bar{b}$.

Höheres Geschlecht:

Erhalte Σ_g durch
Kantenidentifikation eines
regulären $2g$ -Gons:



D.h. a wird
mit a',
b mit b'
usw.
unter ~~der~~

Berücksichtigung der angegebenen
Orientierung verklebt.

Der Rand von D repräsentiert
den Weg

$$a b a^{-1} b^{-1} c d c^{-1} d^{-1}$$

[Etwas unvorsichtig mit
Basispunkt hier.]

Details: siehe z.B.
Skript Friedl.



Proposition 1.3 (ohne Beweis, aber üblich)

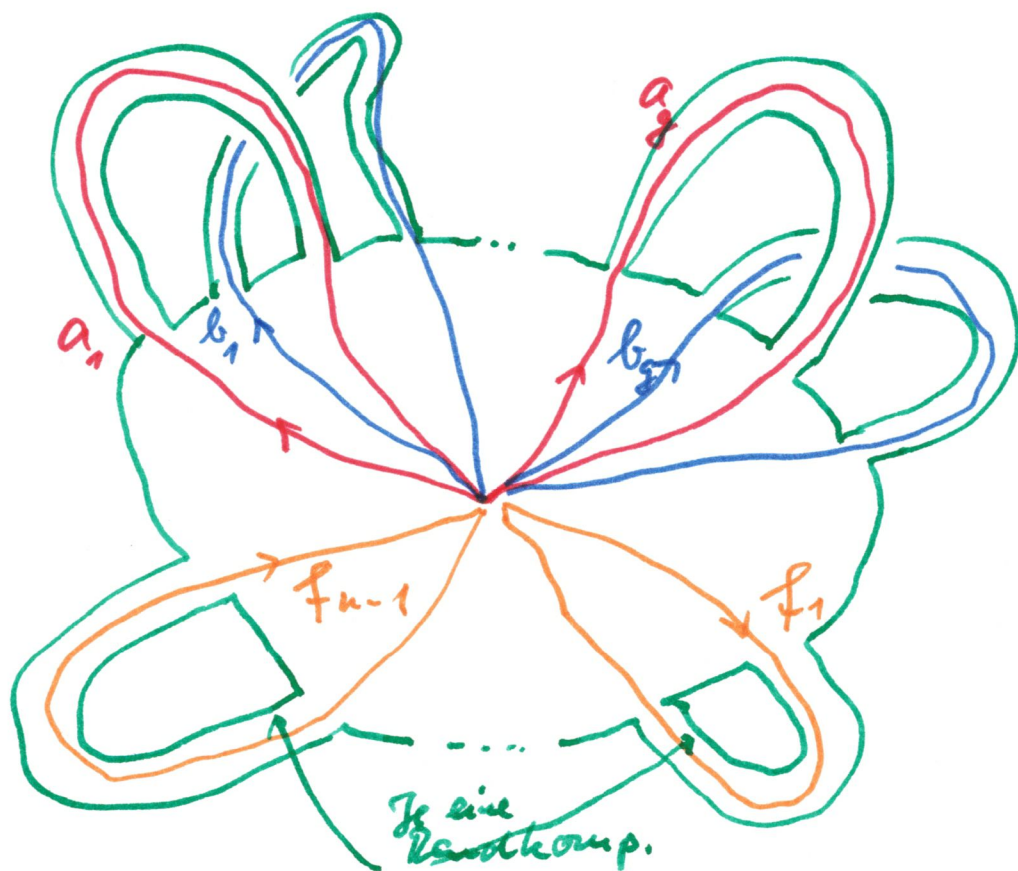
Sei Σ eine kompakte orientierbare Fläche mit $n \geq 2$ Randkomponenten, so ist

$$\pi_1(\Sigma)_{ab} \cong \mathbb{Z}^{2g} \oplus \mathbb{Z}^{n-1}$$

und

$$\pi_1(\Sigma) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{2g + (n-1) \text{ viele.}}$$

Dabei sind Erzeuger wie folgt skizziert:



2. Das Alexander-Polynom S^3 -252-

Sei nun Σ eine orientierte
Seifert-Fläche einer ~~Knotens~~ Verzweigung k .
Diese hat eine Ober- und
Unterseite. Genauer: \exists Umgebung
 U von Σ in S^3 mit

$$U \cong \Sigma \times (-1, 1)$$

Man könnte sagen:

$$\Sigma^+ \quad \text{zeigt in Richtung} \\ \Sigma \times \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$\Sigma^- \quad \text{in Richtung} \\ \Sigma \times \left\{ -\frac{1}{2} \right\}.$$

Seien $i_{\pm} : \Sigma \rightarrow \Sigma \times \left\{ \pm \frac{1}{2} \right\}$
die beiden möglichen
"Wegdruebungen" von Σ .

Sei $* \in \Sigma$.

Sei $f_i : (S^1, *) \rightarrow (\Sigma, *)$

für $i = 1, \dots, 2g, * 2g+1, \dots, 2g+n-1$

eine Familie von jeweils eingebetteten geschlossenen Wegen,

so dass die $x_i := [f_i]$
 $\in \pi_1(\Sigma, *)$

im Quotienten $\pi_1(\Sigma, *)_{ab} \cong \sum^{2g+n-1}$
eine Basis bilden.

Sei V die $(2g+n-1) \times (2g+n-1)$
Matrix, die gegeben ist durch

$$V = (v_{ij})$$

mit $v_{ij} := \text{lk}(f_i^-, f_j)$,

wobei $f_i^\pm := i_\pm \circ f_i : S^1 \rightarrow \Sigma \times \{\pm \frac{1}{2}\}$

ist.

Prop: $\text{lk}(f_i^-, f_j) = \text{lk}(f_i, f_j^+)$

Satz 2.1

Das Polynom

$$\Delta_K(t) := \det(tV - V^t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$$

ist bis auf Multiplikation mit den Einheiten $\pm t^m$, $m \in \mathbb{Z}$ unabhängig von der Wahl der ~~Basen~~ ~~f_i~~ ~~f_i~~ sowie der Wahl und der Orientierung der Seifert-Fläche, hängt also nur von K ab.

Definition: $\Delta_K(t)$ heißt das Alexander-Polynom von K .

Definition: Um der Eindeutigkeit bis auf Einheiten Rechnung zu tragen, schreiben wir auch

$$p(t) \doteq q(t)$$

, falls $p(t) = (\pm t)^m q(t)$ für ein $m \in \mathbb{Z}$ ist.

Bsp:

-255-



$$lk(\bar{a}, a^*) = 0$$

$$lk(\bar{b}, b^*) = 0$$

$$lk(\bar{a}, b) = -1$$

$$lk(\bar{b}, a) = 0$$

$$V - tV^T = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

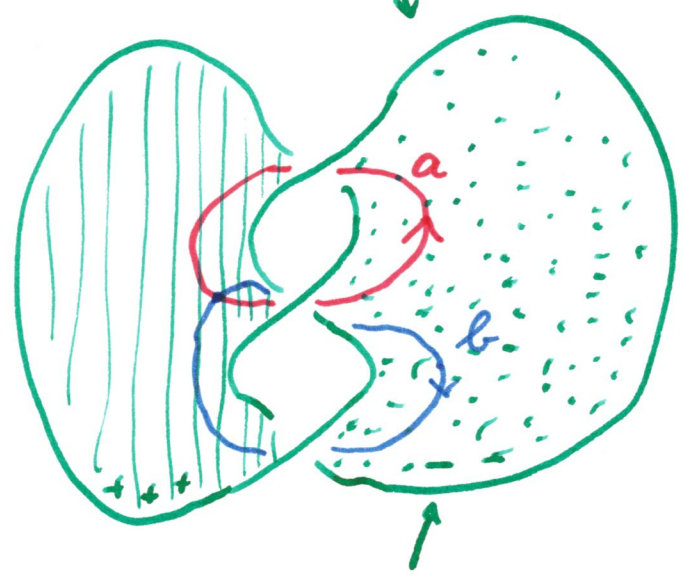
$$\Rightarrow \Delta_u(t)$$

$$= t$$

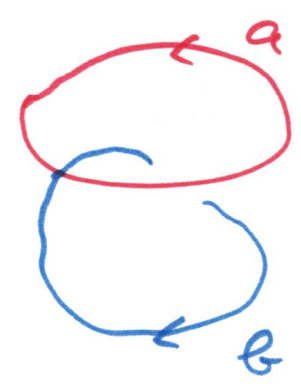
$$= 1$$

Bsp:

Σ Seifot-Fläche für rechtsläufigen Kleeblattknoten

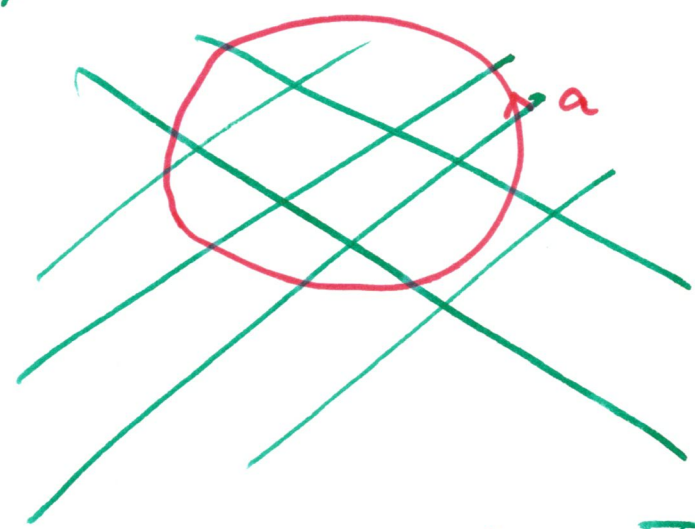


Ohne die Fläche sieht dies so aus:



Die viskomp. "Verschlingung" (a, b schneiden sich in einem Punkt)

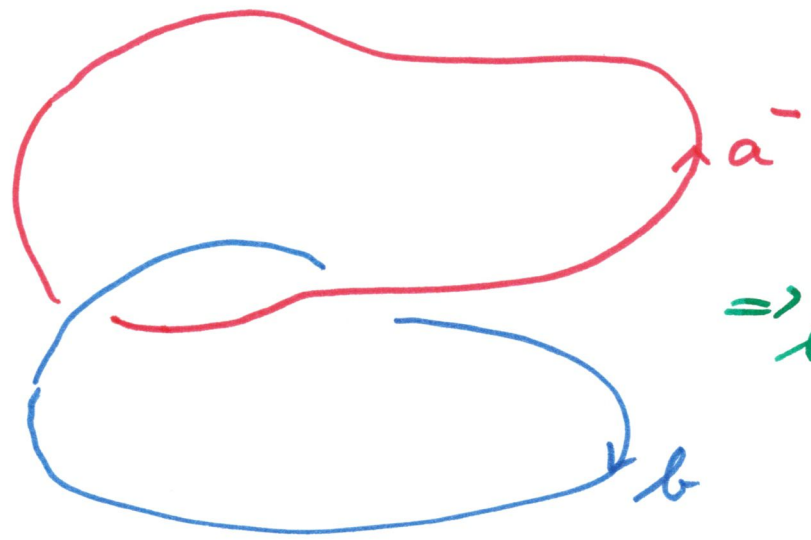
ist



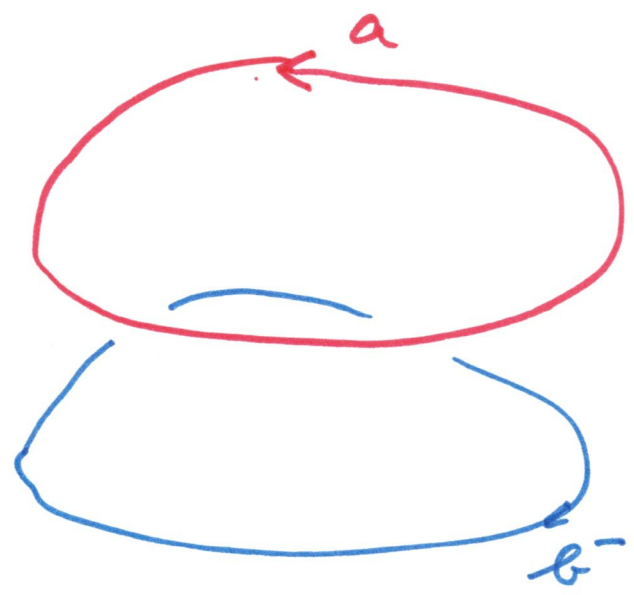
Wir skizzieren im Folgenden die Paare, die bei der Berechnung der Seifot-Matrix auftreten:



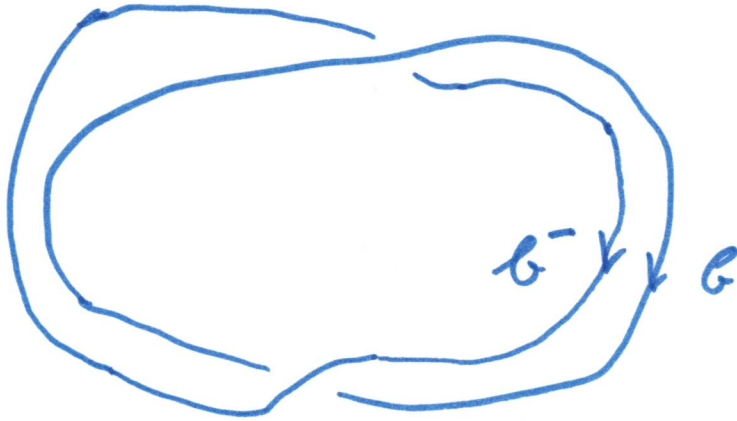
$$\Rightarrow \text{lk}(a, \bar{a}) = -1$$



$$\Rightarrow \text{lk}(a, b) = -1$$



$$\Rightarrow \text{lk}(b, a) = 0$$



$$\Rightarrow \text{lk}(b^-, b) = -1$$

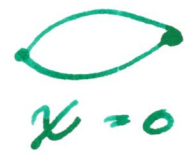
Also ist die Seifert-Matrix
in dieser Basis (von $H_1(\Sigma) \cong \mathbb{Z}^2$)

$$V = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

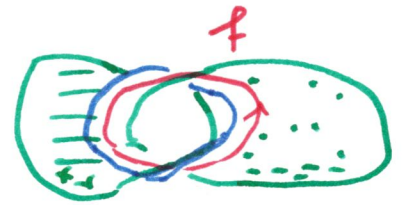
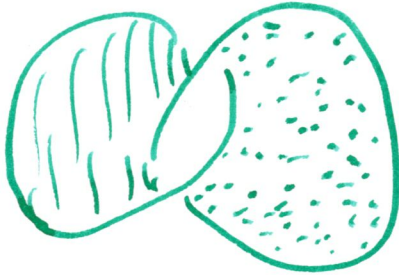
$$\Rightarrow V - tV^T = \begin{pmatrix} (-1+t) & -1 \\ t & (-1+t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta_{3,1}(t) &= (t-1)^2 + t \\ &= t^2 - t + 1 \end{aligned}$$

Bsp:



Hopf-Verschlingung:



$$\ellk(\bar{f}, f^+)$$

$$= -1$$

$$V = -1$$

$$V - tV^T = (-1 + t)$$

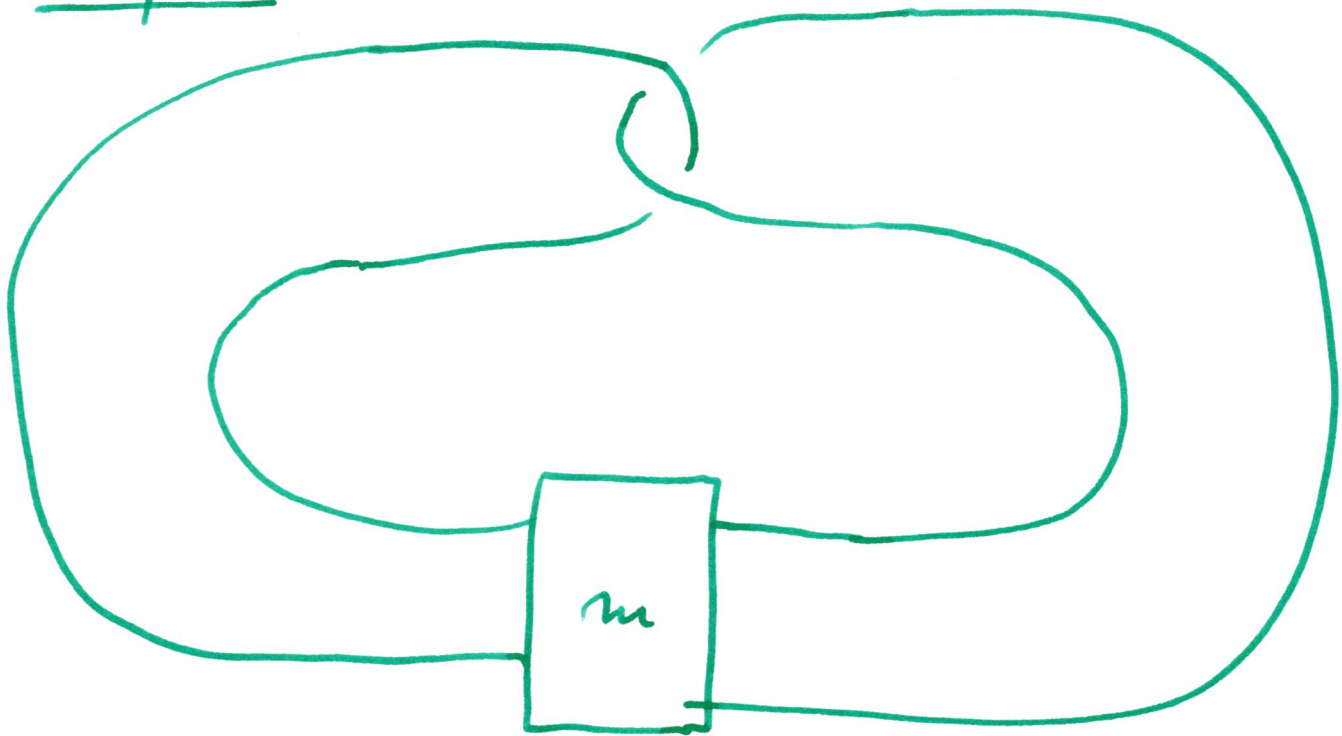
$$\Rightarrow \Delta_{\text{Hopf-Verschl.}}$$

$$\doteq (-1 + t)$$

2-komp.
triv. Versch.::

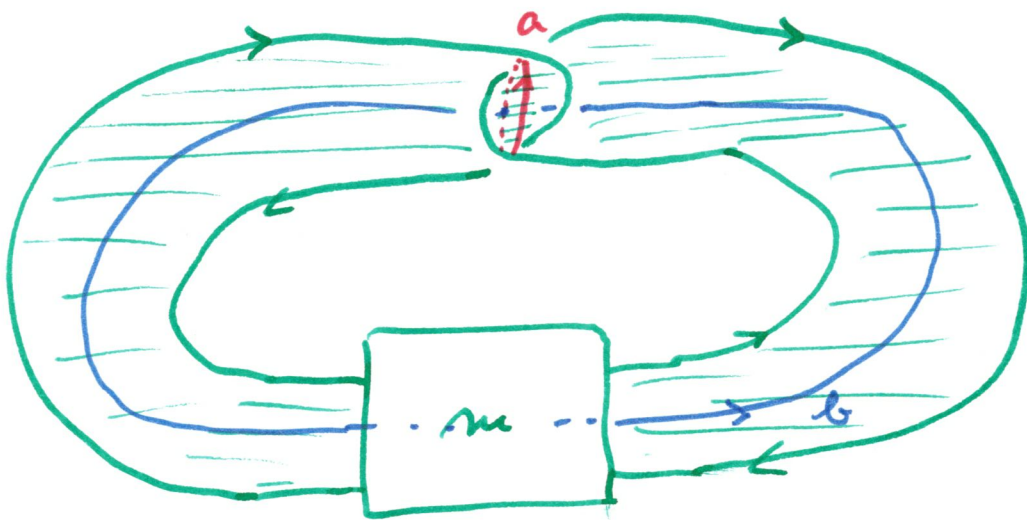
$$\Delta = 0$$

Bsp.:

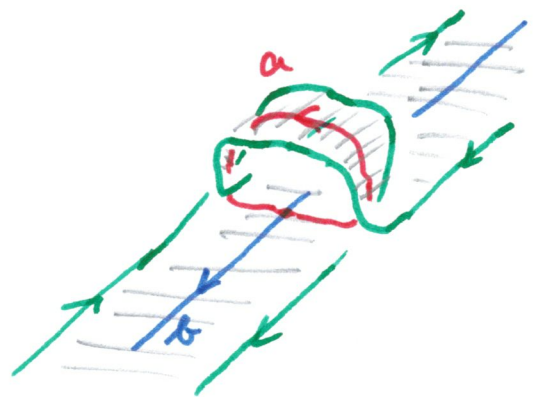


$=: K_m$

Ist m gerade, so haben wir eine Seifert-Fläche, die wie folgt skizziert ist:



Der Bereich \bar{D} oben
sieht dabei von der Seite so
aus:



Dies ist übrigens nicht die Seifert-
Fläche, die der Seifert-Algorithmus
liefert.

Man sieht hier leicht, dass
die Seifert-Matrix in dieser
Basis durch

$$V = \begin{pmatrix} lk(\bar{a}, a) & lk(\bar{a}, b) \\ lk(\bar{b}, a) & lk(\bar{b}, b) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & \frac{m}{2} \end{pmatrix}$$

Also

$$V - tV^T = \begin{pmatrix} -1+t & 1 \\ -t & \frac{m}{2}(1-t) \end{pmatrix}$$

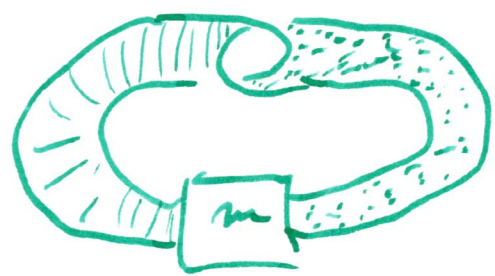
$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta_{K_m} &= -\frac{m}{2}(t-1)^2 + t \\ &= -\frac{m}{2}t^2 + (m+1)t - \frac{m}{2} \end{aligned}$$

Übung: Ist m ungerade,
so sei $m = 2n - 1$.

Dann ist

$$\Delta_{K_m} = n(t^2 - 2t + 1) + t.$$

Man kann dazu folgende
Seifert - Fläche verwenden:



Zuvor wir Satz 2.1 beweisen ⁻²⁶³⁻
(oder skizzieren) zunächst einige
Korollare.

Korollar 2.1

Sei K ein Knoten. Dann ist
 $\text{Spann}(\Delta_K(t)) \leq 2g(K)$.

Beweis:

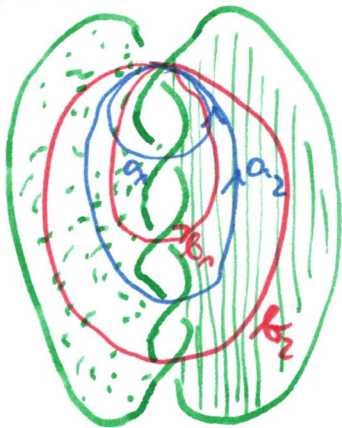
Hier ist $\text{Spann}(p(t))$ eines
Zerrent-Polynoms $p(t)$ definiert
wie oben beim Alexander-Polynom.
Offensichtlich ist dieser Ausdruck
~~invariant~~ invariant unter Multipli-
kation mit den Einheiten $\pm t^m$.
 $\text{Spann}(\Delta_K)$ ist also überhaupt
wohldefiniert. ~~Es~~

Nun ist $\Delta_K(t) = \det(tV - V^T)$,
wobei V die Seifert-Matrix ist,
die man aus einer ~~to~~ Seifert-
Fläche Σ von K und freuzen
 $x_1, \dots, x_{2g} \in H_1(\Sigma)$ (und diese
benenne noch dargestellt durch
eingebettete Kurven $f_i: S^1 \rightarrow \Sigma$)

264⁷ erhält. Nach Satz 2.1 ist $\Delta_k(t)$ unabhängig von den Wahlen. Also können wir oBdA annehmen, dass Σ minimales Geschlecht hat. $tV - VT$ ist dann aber eine $2g(\Sigma) \times 2g(\Sigma)$ -Matrix, und die Determinante hiervon kann höchstens ein Polynom von Grad $2g(\Sigma)$ in t sein. \square

Häufig lässt sich mit Korollar 2.1 das Geschlecht eines Knotens berechnen.

Beispiel: Torus-Knoten $T(2,5)$



Die skizzierte Seifert-Fläche Σ hat Geschlecht 2, und Grenzgeraden a_1, b_1, a_2, b_2 von $H_1(\Sigma)$

(z.B.) sind γ durch die einz. Kurven repräsentiert

Übung: Berechnung

-265-

$$\Delta_{T(2,5)} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4$$

Also $g(T(2,5)) \geq 2$!

Mit dem Seifert-Algorithmus
haben wir ~~aber~~ $g(T(2,5)) \leq 2$
gesehen. Also $g(T(2,5)) = 2$.

Zur Information:

Mit dieser Methode kann
man auch

~~$g(T(p,q))$~~

$$g(T(p,q)) = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

zeigen, wobei es im
Fall von Torusknoten eine
einfachere Methode gibt,
das Alexander-Polynom
zu berechnen.]

Korollar 2.2

Sei L eine Verdrehung.

Dann ist

$$\Delta_L(t) \doteq \Delta_L(t^{-1})$$

Beweis: Sei V eine $n \times n$ -Seifot-Matrix.

$$\begin{aligned} \Delta_L(t) &= \det(tV - V^T) \\ &= t^n \det(V - t^{-1}V^T) \\ &= t^n \det(V^T - t^{-1}V) \\ &= (-t)^n \det(t^{-1}V - V^T) \\ &\doteq \Delta_L(t^{-1}) \end{aligned}$$

Proposition 2.3 $\Delta_L(t) \doteq \Delta_{\bar{L}}(t)$

Beweis: Sei L eine Verdrehung.

Dann ist für die gespiegelte

Verdrehung nach Wahl einer

Seifot-Matrix V gegeben.

Es ist dann $-V$ eine Seifot-

Matrix für \bar{L} , wie man durch Spiegelung sieht. 

Insofern ist das Alexander-
Polynom "schwächer" als das
Jones-Polynom, welches Spiegel-
Bilder unterscheiden kann.

Ähnlich wie beim Jones-
Polynom hat man:

Prop 2.4: $\Delta_{k_1+k_2}(t) = \Delta_{k_1}(t) \cdot \Delta_{k_2}(t)$

Beweis: k_1+k_2 hat eine Seifert-
Fläche mit Seifert-Matrix

$$V = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}$$

wobei V_i eine Seifert'-Matrix für
 K_i ist. □

3. Algebraische Vorbereitung

kommutativer

Sei R ein Ring mit Einselement.
(Bei uns wird $R = \mathbb{Z}$ oder $R = \mathbb{Z}[\{E\}^{-1}]$ sein.)

Eine abelsche Gruppe M heißt Modul über R , falls es einen Ringhomomorphismus

$$R \longrightarrow (\text{End}(M), +, \circ)$$

punktwe. Addition von Endom.

Hintereinanderausführung

gibt.

Dies ist eine Verallgemeinerung des Begriffs des Vektorraums (welcher ein Modul über speziellen Ringen, nämlich Körpern ist.)

\mathbb{Q} -Algebra!

Bsp.: • \mathbb{Z}^n ist ein \mathbb{Z} -Modul

• \mathbb{Z}^n ist ein \mathbb{Z} -Modul
~~(aber nicht frei ist)~~

Ein Modul M heißt frei, wenn es ein Erzeugendensystem gibt, mit dem sich jedes Element in M auf eine eindeutige Weise als Linearkombination schreiben lässt. So ein Erzeugendensystem nennt man Basis.

- Bsp: • \mathbb{Z}^n ist freies \mathbb{Z} -Modul
- R^n ————— R -Modul
für jeden Ring R
- \mathbb{Z}/n ist nicht freies \mathbb{Z} -Modul:

Für jedes Element $a \in \mathbb{Z}/n$ ist

$$\underbrace{(k+n)}_{\in \mathbb{Z}} \cdot a = \underbrace{k}_{\in \mathbb{Z}} \cdot a$$

Ein freies Modul M über R mit endlicher Basis ist isomorph zu einem R^n .

240-

Ein Modul M heißt endlich
präsentierbar, wenn es freie
Modulen F, E gibt, sowie
eine surjektive Abbildung

$$\phi: E \rightarrow M$$

einer Abb $\alpha: F \rightarrow E$,

so dass $\alpha(F) = \ker(\phi)$.

Ein solches Quadrupel (E, F, α, ϕ)

Sind ^{endliche} Basen
 (e_i) ~~und~~ von E

heißt Präsentation
von M .

und
 (f_j) von F gegeben, so ist

$$\alpha(f_j) = \sum_k A_{kj} e_k$$

für $j=1, \dots$

Dann nennt man die
Matrix $A = (A_{ij})$

Präsentations-Matrix von M .

Jede Präsentations-Matrix
legt einen Modul bis auf Isomorphie
fest.

Satz 3.1

Je zwei Präsentationsmatrizen A und A' desselben Moduls M (oder zweier isom. Modulen) lassen sich durch folgende Operationen ineinander und ihrer Inversen überführen:

- (i) Permutation von Spalten oder Zeilen
- (ii) $A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$
- (iii) Addition einer neuen Spalte mit Nullen
- (iv) Addition skalares Vielfaches einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (bzw. Spalte.)

Beweis: Übung.
 Siehe z. B. [Lickorish, Anfang Kapitel 6]

Def. 3.2 Elementare Ideale. -272-

Sei M ein Modul über R und
 A eine $m \times n$ Präsentations-
Matrix von A .

Das k^{te} elementare Ideal ^{von M}
 $\mathcal{E}_k \subseteq R$ ist das Ideal,
das von allen $(n - (k-1)) \times$
 $(n - (k-1))$ -Minoren ^{von A} erzeugt wird.

Ein $i \times i$ -Minor einer Matrix B ist dabei die
Determinante einer Matrix, die man
aus B durch Streichen von Zeilen
und Spalten erhält, bis man nur
noch i Zeilen und i Spalten hat.

Also: Erhalte k^{tes} elementares Ideal
aus den Minoren von A , die
durch Streichen von $(k-1)$ Zeilen
und ~~also~~ $(n - m + k - 1)$ Spalten
entstehen.

Offenbar ist $\mathcal{E}_{k-1} \subseteq \mathcal{E}_k$.

(„entwickeln“ einer Determinante nach einer Zeile oder Spalte)

Vereinbarung: $\mathcal{E}_k = R$, wenn $k > n$

$\mathcal{E}_k = 0$ wenn $k \leq 0$.

Beobachtungen:

(1.) Die elementaren Ideale eines Moduls hängen nicht von der Wahl der Präsentationsmatrix ab.
(Folgt aus Satz 3.1)

(2.) Ist A eine quadratische Matrix, so ist das erste elementare Ideal \mathcal{E}_1 ein Hauptideal, das von $\det A$ erzeugt wird, d. h.

$$\mathcal{E}_1 = (\det A)$$

Nicht notwendigerweise ist, allerdings $\det A = \det A'$ für zwei Präsentationsmatrizen desselben Moduls

4. Der Alexander-Modul -274-

Wir haben gesehen, dass die abelsche Invariante $H_1(S^3, K)$ nicht viel Information über S^3 bzw. S^3, K enthält.

Wir konstruieren nun einen neuen Raum X_0 von K ausgehend, der mehr Informationen über K enthält.

Sei $X' := S^3, K$

Sei V eine Vollraum-Umgebung von K .

Sei $X := S^3, V$.

Natürlich gibt es eine

Deformations-Retraktion

$$X' \xrightarrow{\cong} X$$

insbesondere ist $\pi_1(X', *) \cong \pi_1(X, *)$
ein Isomorphismus

-275-

Sei nun $\Sigma' \hookrightarrow S^3$
eine Seifert-Fläche von K ,
nicht notwendigerweise von
minimalem Geschlecht.

Sei $\Sigma := X \cap \Sigma'$.
Es ist $\Sigma' \cong \Sigma$.

~~Sei $X := X \setminus \Sigma$~~

Der Raum $X \setminus \Sigma$ ist nun
nicht mehr abgeschlossen in X ,
aber wir können $X \setminus \Sigma$ auf
natürliche Weise kompaktifizieren,
so dass die Kompaktifizierung
 Y zwei Kopien von Σ enthält,
die wir als Σ_+ und Σ_-
bezeichnen wollen. Durch diese
Kompaktifizierung erhalten wir
auch einen natürlichen

$$\Sigma_{-} \xrightarrow{\phi} \Sigma_{+}$$

[Vorlesung: Wie kann man so eine Kompaktifizierung wirklich konstruieren.]

Analogie: $* \in S^1 \setminus \{*\}$ (0,1)

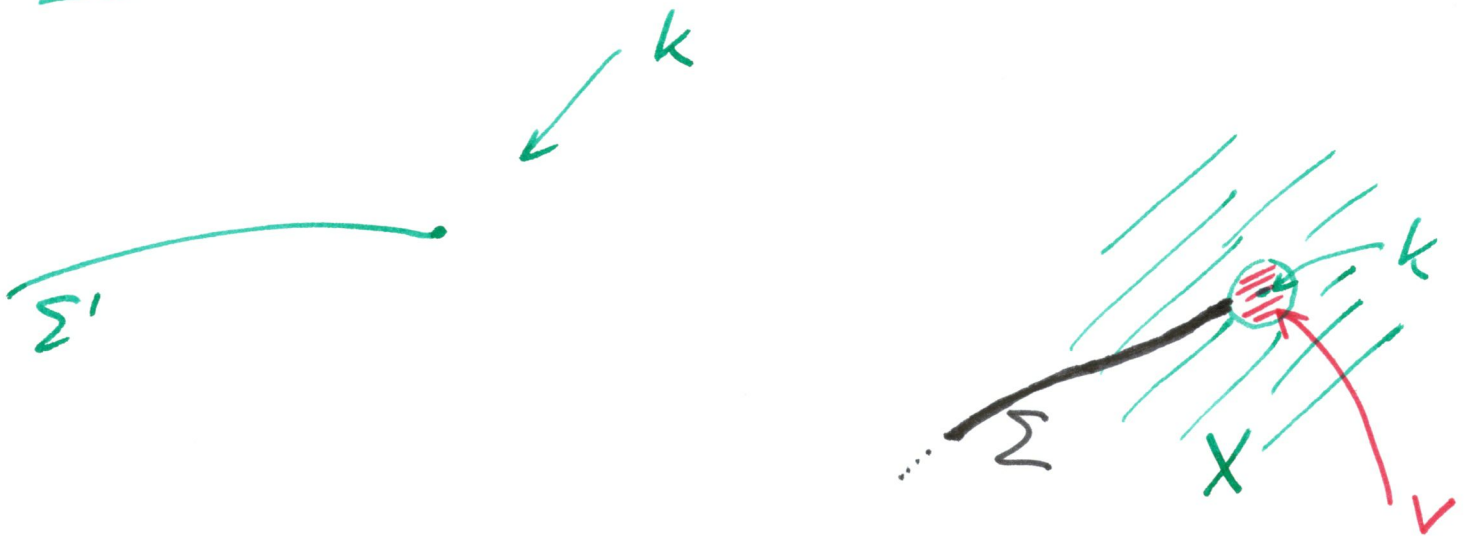
$S^1 \setminus \{*\}$ hat eine natürliche Kompaktifizierung homöomorph zu $[0,1]$.
Durch Wiederidentifizieren der Ränder erhält man S^1 zurück.

Erhalte aus Y den Raum X zurück vermöge

$$X = Y / \sim =: Y / \phi$$

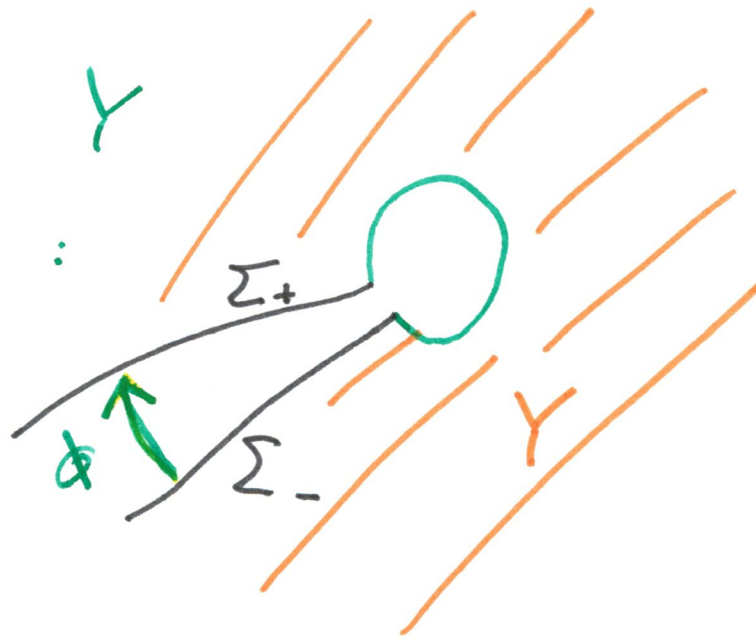
mit $\phi(x) \sim x$
für $x \in \Sigma_{-}$.

Querschnitt:



Dann
sieht

so aus :



Sei nun

$$\coprod_{i \in \mathbb{Z}} Y_i$$

eine disjunkte Vereinigung von
 "viele" Y_i , d. h. sei
 "jedes Y_i homöomorph zu Y
 vermöge $h_i : Y \rightarrow Y_i$.

Jedes Y_i hat die beiden
 Komponenten $h_i(\Sigma_+)$ und
 $h_i(\Sigma_-)$ im Rand ∂Y_i .

Sei nun X_∞ der Quotienten-
 Raum

$$X_\infty := \coprod_{i \in \mathbb{Z}} Y_i / \sim$$

wobei die Äquivalenzrelation
 gegeben ist durch

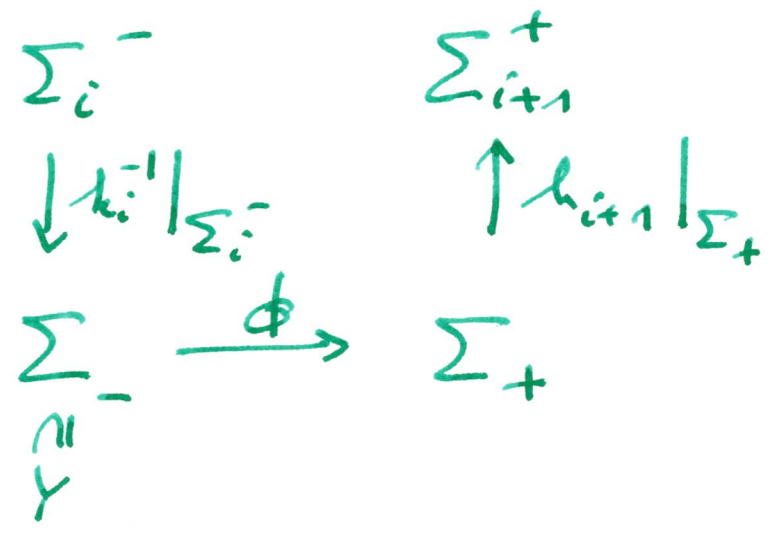
$$\Sigma_i^- \ni x \sim \underbrace{h_{i+1} \circ \phi \circ h_i^{-1}}_{=: \phi_i}(x).$$

Ausdruckslich:

$$\Sigma_i^- \subseteq Y_i$$

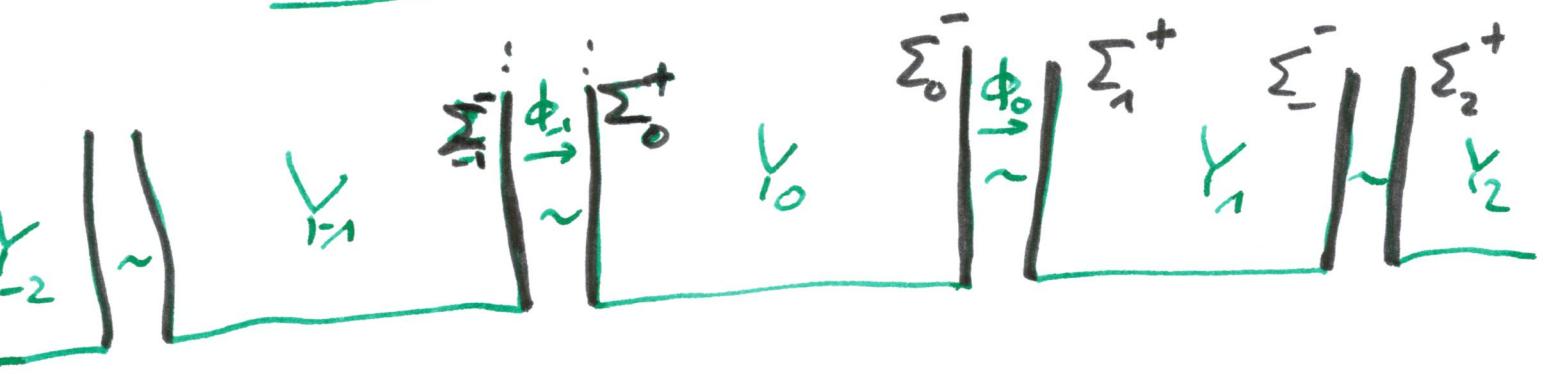
wird mit $\Sigma_{i+1}^+ \subseteq Y_{i+1}$

mittels des natürl. Homöom.



verklebt.

Schematische:

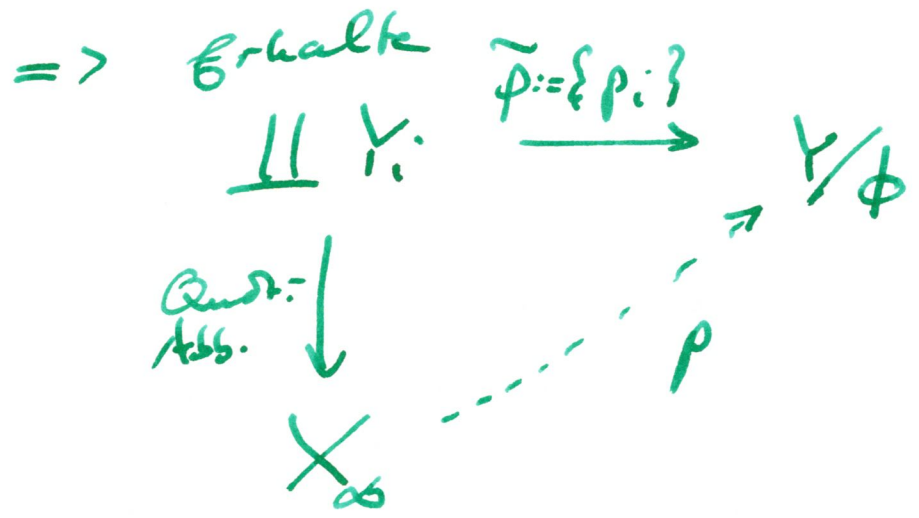
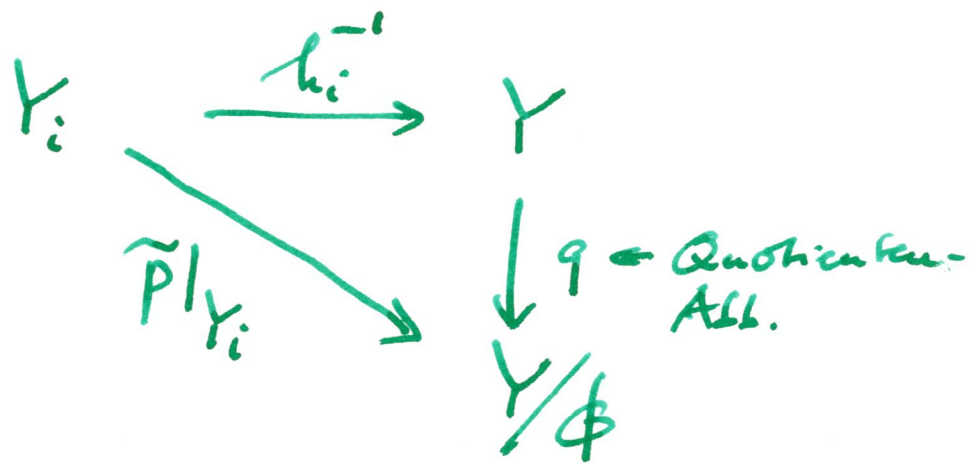


Wir haben nun zwei weitere natürliche Abbildungen:

(1.) $p: X_\infty \rightarrow \cancel{Y/\phi}$

definiert durch $\tilde{p}|_{Y_i}$ wie folgt: $\cong X$

~~$\tilde{p}|_{Y_i} = h_i: Y_i \rightarrow$~~



Übung: \tilde{p} faktorisiert zu einer Abbildung $p: X_\infty \rightarrow Y/\phi$

Man kann zeigen, dass

$$p : X_\infty \rightarrow X$$

eine ^(normale) "Überlagerung" ist.

[cf. Skript Friedl oder die meisten Topologie-Lehrbücher für diesen Begriff. Wir werden ~~dieser~~ aber die Überlagerungstheorie nirgends brauchen außer im späteren Nachweis, dass X_∞ "essentiell" nicht von der Wahl der Seifert-Fläche abhängt.]

$$(2.) \quad X_\infty \xrightarrow{\tilde{\tau}} X_\infty$$

wie folgt

$$\coprod Y_i \xrightarrow{\tilde{\tau}} \coprod Y_i$$

$$\tilde{\tau}|_{Y_i} = h_{i+1} \circ h_i^{-1} : Y_i \rightarrow Y_{i+1}$$

"Rechts-Schift"

und man zeigt, dass $\tilde{\tau}$ eine wohldefinierte Abbildung τ induziert, so dass

$$\begin{array}{ccc} \coprod Y_i & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & \coprod Y_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_\infty & \xrightarrow{\tau} & X_\infty \end{array}$$

kommutiert.

Proposition: Es ist

$$\begin{array}{ccc} X_\infty & \xrightarrow{\tau} & X_\infty \\ & \searrow p & \swarrow p \\ & & X \end{array}$$

kommutativ. Insb. ist τ ein Homöomorphismus.

[d.h. τ ist eine Deck-Transformation der Überlagerung $p: X_\infty \rightarrow X$.]

Beweis: Übung.



Proposition: X_∞ ist weg-zusammenhängend.

Beweis: Übung.

□

Wie sich herausstellen wird, ist $\pi_1(X_\infty)$ eine interessante abelsche Gruppe in Bezug auf k , die nicht von der Wahl der Leitert-Fläche abhängen wird.

Beobachtung:

τ induziert einen Isomorphismus
 $\tau_* : \pi_1(X_\infty, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X_\infty, \tau(x_0))$

(für jedes $x_0 \in X_\infty$), und damit auch einen Isomorphismus

-284-

$$\tau: H_1(X_\infty) \rightarrow H_1(X_\infty).$$

Sei nun.

$$p(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k t^k \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$$

mit $a_k = 0$
für fast alle k
(d.h. bis auf endlich
viele)

ein Laurent-Polynom.

Für $x \in H_1(X_\infty)$ definieren
wir

$$p(t) \cdot x := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (\tau^k)_* x.$$

$$\text{Es ist } (\tau^k)_* = (\tau_*)^k \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Man zeigt nun, dass mit
dieser äußeren Multiplikation

$$\mathbb{Z}[t, t^{-1}] \times H_1(X_\infty) \rightarrow H_1(X_\infty)$$

die abelsche Gruppe $H_1(X_\infty)$
zu einem Modul über dem
Ring $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ wird. (Übung!)

5. Beweis des Satzes 2.1 -285-

Satz 2.1 folgt aus folgenden beiden Propositionen:

Prop 5.1.

Je zwei Seifert-~~Atta~~ ^{Flächen} Σ, Σ' eines Knotens K liefern mit obiger Konstruktion isomorphe $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -Moduln $H_1(X_\infty)$ und $H_1(X'_\infty)$

↑
konstruiert mit Seifert-Fläche Σ

↑
konstruiert mit Seifert-Fläche Σ'

Prop 5.2

Ist V die Seifert-Matrix, die man aus der Seifert-Fläche Σ und der Wahl von eingebetteten Kurven f_1, \dots, f_g erhalten hat (die eine Basis von $H_1(\Sigma)$ bilden),

so ist die Matrix -286-

$$tV - V^T$$

eine Präsentationsmatrix des $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -Moduls $H_1(X_\infty)$.

In der Tat folgt jetzt Satz 2.1, weil nach Prop 5.2 das Alexander-Polynom $\Delta_K(t) = \det(tV - V^T)$ gerade ein Erzeuger des ersten elementaren (Haupt-)ideals des $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -Moduls $H_1(X_\infty)$ ist. (Man beachte nämlich, dass $tV - V^T$ eine quadratische Matrix ist.) Die Unabhängigkeit von der Wahl der Seifert-Fläche ergibt sich aus Proposition 5.1.

Beweis von Prop 5.1: -287-

Wir wollen zeigen, dass die dar. Untergruppe

$$p_* \pi_1(X_\infty, \tilde{x}_0) \triangleleft \pi_1(X, x_0)$$

nicht von der Wahl der Seifert-Fläche abhängt.

Nun ist [Satz aus d. Überlagerungstheorie] \sum_{115}

$$1 \rightarrow \pi_1(X_\infty, \tilde{x}_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{D} \text{Aut}(p) \rightarrow 1$$

exakt, d. h. $\ker D = p_* \pi_1(X_\infty, \tilde{x}_0)$.

D faktorisiert aber durch die Abelianisierung von $\pi_1(X, x_0)$,

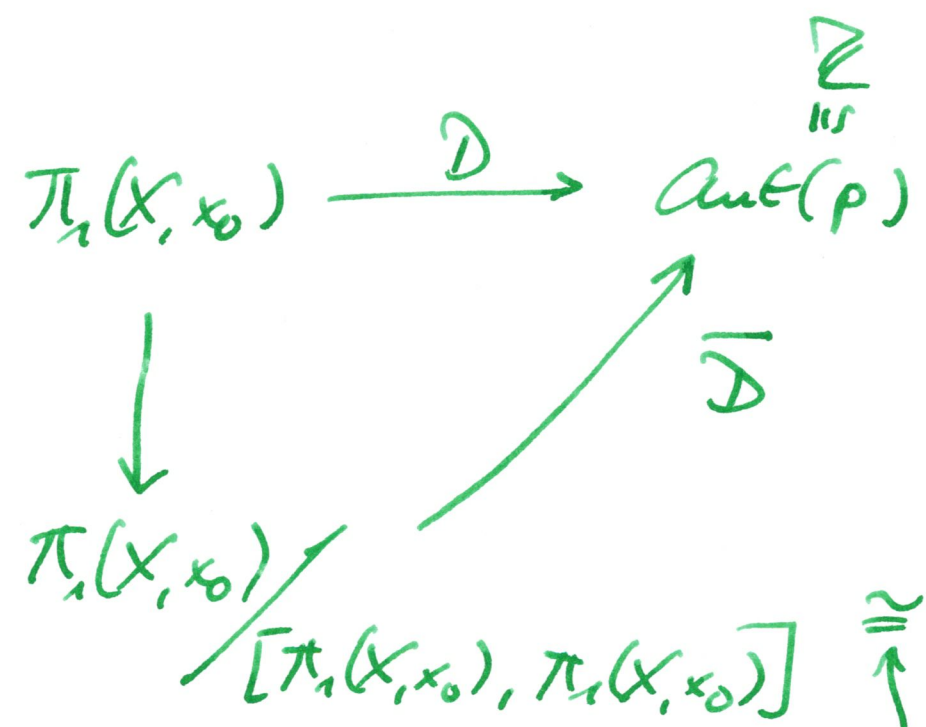
also ~~liegt~~ ^{enthält} $p_* \pi_1(X_\infty, \tilde{x}_0) = \ker D$

den Kern des Abelianisierungs-
homom., welcher $[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)] \triangleleft \pi_1(X, x_0)$

ist. ~~Der Kern des~~

~~ker~~

Der Kern des Homom. \bar{D}
in



ist gerade gegeben durch

$$\text{ker } \bar{D} / [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)] \cong p_* \pi_1(X_{x_0}, \tilde{x}_0) / [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$$

Korollar der
Wirksamer-
Präsentation

Mittels obiger Isomorphismen
liefert \bar{D} einen Homom.

$$\sum_{\cong} \pi_1(X, x_0)_{ab} \longrightarrow \sum_{\cong} \text{Aut}(p)$$

welcher surjektiv ist. Ein

surjektiver Gruppenhomom. -289-

$$\Sigma \rightarrow \mathbb{Z}$$

~~Das~~ muss jedoch ein Isomorphismus sein. Folglich

$$\text{ist } p_* \pi_1(X_\infty, \tilde{x}_0) \cong [\pi_1(X_\infty, x_0), \pi_1(X, x_0)].$$

Aus der Überlagerungstheorie folgt daher, dass die beiden Überlagerungen

$$X_\infty(\Sigma)$$

mit Σ
konstruiert

$$\begin{array}{c} \searrow p \\ X \\ \nearrow p' \\ X_\infty(\Sigma') \end{array}$$

isomorphe Überlagerungen sind.

-290-

Es gibt daher einen Homöomorphismus h , so dass

$$\begin{array}{ccc}
 X_\infty & \xrightarrow{h} & X'_\infty \\
 \searrow p & & \swarrow p' \\
 & X &
 \end{array}$$

kommutiert.

h induziert nun einen $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -Isomorphismus

$$H_1(X_\infty) \rightarrow H_1(X'_\infty),$$

sofern $\tau' \circ h = h \circ \tau$.

Es muss aber

$$h^{-1} \circ \tau' \circ h = \tau^{\pm 1}$$

sein, weil beide Homöomorphismen die Decktransformationsgruppe $\text{Aut}(p) \cong \mathbb{Z}$ erzeugen.

Man kann ~~das~~ beweisen, dass

$$h^{-1} \circ \tau' \circ h = \tau$$

indem man Σ und Σ' "konsistent orientiert":

Verlange, dass die Oberseiten von Σ und Σ' ~~konsistent~~ mit die gleiche Orientierung auf $\partial\Sigma = \partial\Sigma' = K$ induzieren (die man vorher auf K gewählt hat.)



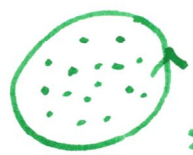
Hierzu schreibe:

Oberseite



induziert diese Orientierung auf Rand,

unterseite induziert



diese

=



(Umdrehen)

Das beweist Prop 5.1.

-292-

Bevor wir mit dem Beweis
von Prop. 5.2 weitermachen,
einige sehr nützliche und
schöne Interpretationen der
Verdrehungszahl einer 2-komp.
Verdrehung.

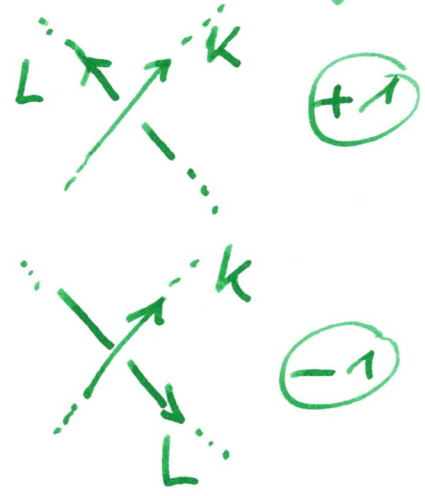
Sei K ein ^{orientierter} Knoten, Σ eine
konsistent orientierte Seifert-Fläche
und L ein orientierter Knoten
in $S^3 \setminus K$.

Wir definieren folgende
Zahlen:

(1.) $lk_{\text{diag}}(L, K) = \frac{1}{2} \cdot$ Anzahl
der Kreuzungen von L
und K in einem
regulären Diagramm
für die Verdrehung
 $L \cup K$.

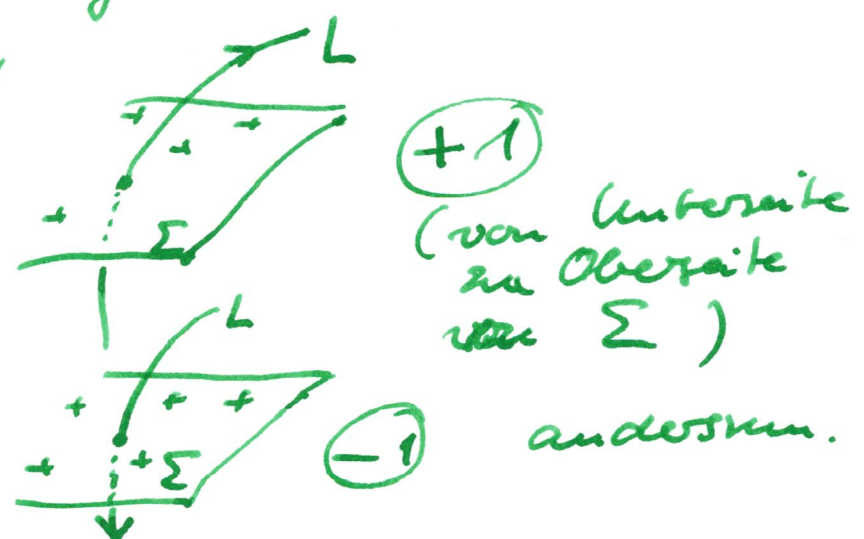
(= orth. Def. von $lk(L, K)$)

(2.) $lk_{diag}'(L, k) =$ Anzahl der Unterkreuzungen von L unter k , mit Vorzeichen gezählt



(3.) $lk_{Seif}(L, k) =$ Anzahl der ~~Kreuzungen~~ von Schnittpunkte von L mit Σ , mit Vorzeichen gezählt:

(*) in allgemeines "Lage" zueinander, insb. ist $L \cap \Sigma$ endlich!



(von Unterseite zu Oberseite von Σ)

anderson.

(4.)

$$lk_{\text{abel}}(L, K) = n,$$

-294-

wobei

$$[L] = n \cdot [m]$$

$$\text{in } \pi_1(S^3, K)_{\text{ab}} \cong \mathbb{Z},$$

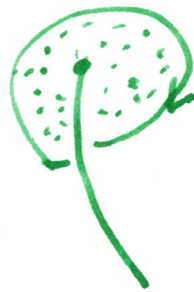
wo m ein Bringer

sei, der "positiver

Meridian" von K

ist: m ist orientiert
als Rand einer Meridian-
scheibe an K , die K
positiv im Sinn von (3.)

schneidet:



$$(5.) \quad lk_{\substack{\text{über.} \\ (L, K)}} = n \in \mathbb{Z},$$

so dass wir für
 die Hochhebung \tilde{L} von L
 in $X_0 \mapsto X \approx S^3 \cdot K$,
 die im Punkt \tilde{x}_0 beginne,
 die Gleichung

$$\tau^n(\tilde{x}_0) = \tilde{L}(1)$$

Endpunkt
der
Hochhebung

(hier fassen wir L auf als

$$L: (S^1, *) \rightarrow (X, x_0)$$

$$\parallel$$

$$[91]_{\mathbb{Z}} / 0 \sim 1$$

.)

Satz 5.3 Die Zahlen lk_{\dots}

in (1.) - (5.) stimmen
 überein.

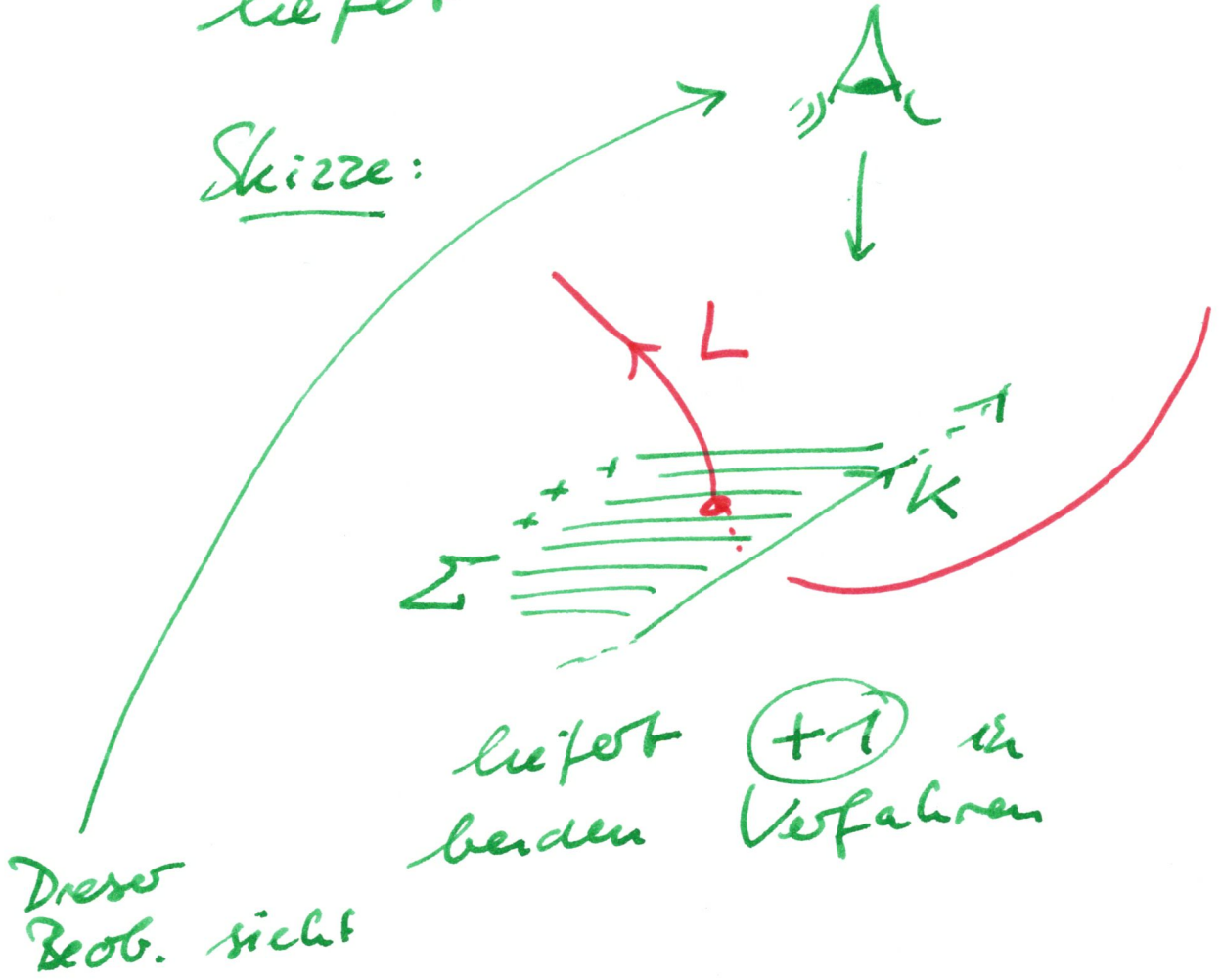
Bemerkung: $lk_{\text{seit.}}$ und $lk_{\text{über.}}$
 scheinen a priori
 von der Wahl der Seifert-
 Fläche abzuhängen.

Beweis: • $lk_{Diag} = lk'_{Diag}$ Übung.

• $lk_{Seif}(L, K) = lk'_{Diag}(L, K)$,

wobei wir links die Seifot-Fläche nehmen, die der Seifot-Algorithmus liefert

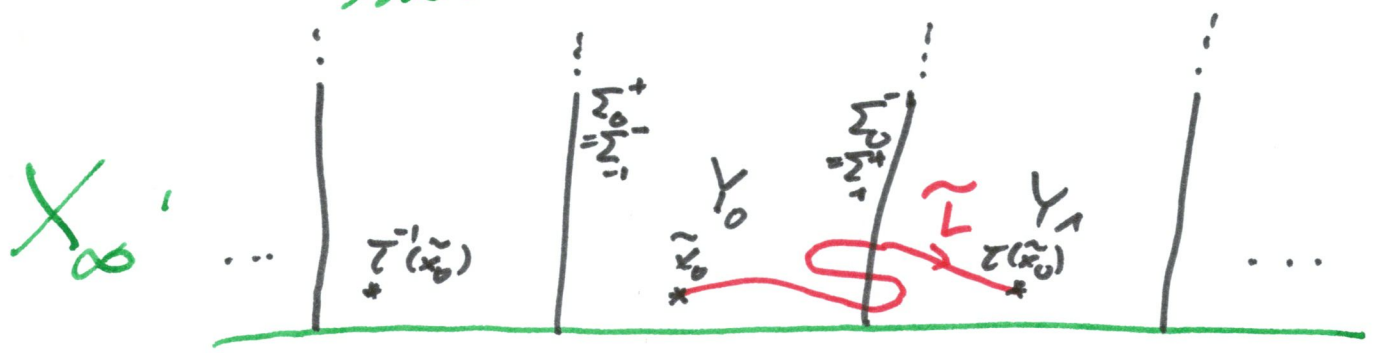
Skizze:



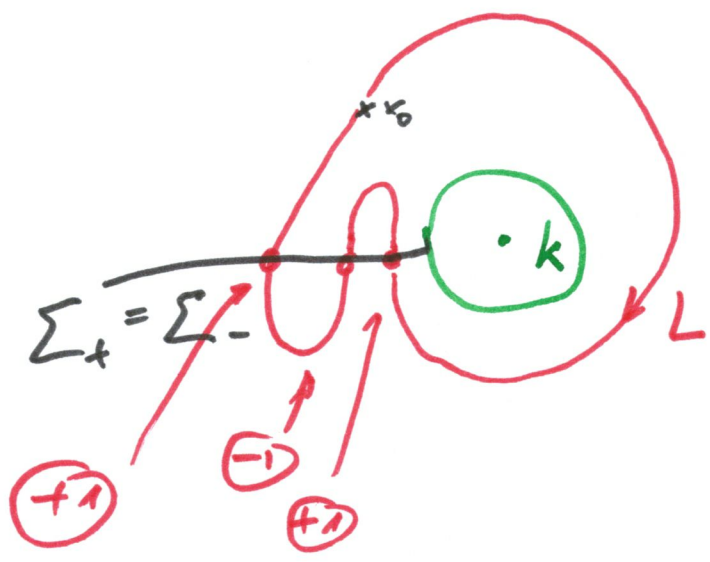
Subspredend für (-1).

• $lk_{\text{Seif}}(L, k) = lk_{\text{libel.}}(L, k)$

sieht man so:



↓ P



$X = Y/\phi$

$ln \quad \tau^n(\tilde{x}_0) = \tilde{L}(1) \quad \text{ist}$

n also die Zahl, mit
Vorzeichen gezählt, wie oft

\tilde{L} von einem Y_i zu einem
 Y_{i+1} wechselt, was gleich

$lk_{\text{Seif}}(L, k)_{\text{ist.}}$

Beide Zahlen hängen
 a priori von der Schnitt-
 Fläche ab. Wegen den
 Argumenten im Beweis von
 Prop. 5.1 ~~ist~~ ist aber

$lk_{\text{abel}}(L, k)$ unabhängig
 von der Wahl der Schnitt-
 Fläche.

• $lk_{\text{abel}}(L, k) = lk_{\text{abel}}^{\text{abel}}(L, k)$

kann man mittels obigem $\cong \langle \tau \rangle$

