5. Beweis des Satzes 2.1

Satz 2.1 folgt aus folgenden beiden Propositionen:

Prop 5.1.

Je zwei Seifert-~~Matrizen~~ Flächen (oder Verschlingung) Σ, Σ' eines Knotens K liefern mit obiger Konstruktion isomorphe $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-Moduln $H_1(X_\infty)$ und $H_1(X'_\infty)$

$\uparrow$ konstruiert mit Seifert-Fläche Σ

$\uparrow$ konstruiert mit Seifert-Fläche Σ'.

Prop 5.2

Ist V die Seifert-Matrix, die man aus der Seifert-Fläche Σ und der Wahl von eingebetteten Kurven $f_1, \dots, f_{2g}$ erhalten hat (die eine Basis von $H_1(\Sigma)$ bilden), so ist die Matrix

$$tV - V^T$$

eine Präsentierungsmatrix des $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$-Moduls $H_1(X_\infty)$.

In der Tat folgt jetzt Satz 2.1, weil nach Prop 5.2 das Alexander-Polynom $\Delta_K(t) = \det(tV - V^T)$ gerade ein Erzeuger des ersten elementaren (Haupt-) ideals des $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$-Moduls $H_1(X_\infty)$ ist. (Man beachte nämlich, dass $tV-V^T$ eine quadratische Matrix ist.) Die Unabhängigkeit von der Wahl der Seifert-Fläche ergibt sich aus Proposition 5.1.

Beweis von Prop 5.1:

Wir wollen zeigen, dass die char. Untergruppe

$$p_* \pi_1(X_\infty, \tilde{x}_0) \triangleleft \pi_1(X, x_0)$$

nicht von der Wahl der Seifert-Fläche abhängt.

Nun ist [Satz aus d. Überlagerungstheorie]

$$1 \to \pi_1(X_\infty, \tilde{x}_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{D} \underset{\cong\ \mathbb{Z}}{\mathrm{Aut}(p)} \to 1$$

exakt, d.h. $\ker D = p_* \pi_1(X_\infty, \tilde{x}_0)$.

D faktorisiert aber durch die Abelianisierung von $\pi_1(X, x_0)$,

also ~~liegt~~ enthält $p_* \pi_1(X_\infty, x_0) = \ker D$ den Kern des Abelianisierungs-homom, welcher $[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)] \triangleleft \pi_1(X, x_0)$ ist. ~~Der Kern des~~

D ist gegeben durch

$[\alpha] \in \pi_1(X, x_0) \longmapsto$ Eindeutige Deck-Transformation $f \in \mathrm{Aut}(p)$, so dass $f(\tilde{x}_0) = \tilde{\alpha}(1)$ mit $\tilde{\alpha}$ der Hochhebung

Der Kern des Homom. $\bar{D}$

in

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z} \arrow[d, phantom, "\cong" sloped] \\ \pi_1(X,x_0) \arrow[r, "D"] \arrow[d] & \mathrm{Aut}(p) \\ \pi_1(X,x_0) \big/ [\pi_1(X,x_0), \pi_1(X,x_0)] \arrow[ur, "\bar{D}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\pi_1(X,x_0) \big/ [\pi_1(X,x_0), \pi_1(X,x_0)] \cong \mathbb{Z}$$

Korollar der Wirtinger-Präsentation

ist gerade gegeben durch

$$\ker D \big/ [\pi_1(X,x_0), \pi_1(X,x_0)] \cong p_* \pi_1(\tilde{X}_\infty, \tilde{x}_0) \big/ [\pi_1(X,x_0), \pi_1(X,x_0)].$$

Mittels obiger Isomorphismen ~~in~~ liefert $\bar{D}$ einen Homom.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \text{\rotatebox{90}{$\cong$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\cong$}} \\ \pi_1(X,x_0)_{ab} & & \mathrm{Aut}(p) \end{array} ,$$

welcher surjektiv ist. Ein

surjektiver Gruppenhomom.

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

~~Das~~ muss jedoch ein Isomorphismus sein. Folglich

ist $p_* \pi_1(X_\infty, \tilde{x}_0) \cong [\pi_1(X_\infty, x_0), \pi_1(X, x_0)]$.

Aus der Überlagerungstheorie folgt daher, dass die beiden Überlagerungen

$$\begin{tikzcd} X_\infty(\Sigma) \arrow[dr, "p"] & \\ & X \\ X_\infty(\Sigma') \arrow[ur, "p'"'] & \end{tikzcd}$$

mit Σ konstruiert

isomorphe Überlagerungen sind.

Es gibt daher einen Homöomorphismus h, so dass

$$\begin{tikzcd} X_\infty \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & X'_\infty \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

h induziert nun einen $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-Isomorphismus

$$H_1(X_\infty) \longrightarrow H_1(X'_\infty),$$

sofern $\tau' \circ h = h \circ \tau$.

Es muss aber

$$h^{-1} \circ \tau' \circ h = \tau^{\pm 1}$$

sein, weil beide Homöomorphismen die Decktransformationsgruppe $\operatorname{Aut}(p) \cong \mathbb{Z}$ erzeugen.

Man kann ~~[illegible]~~ bewerkstelligen, dass

$$h^{-1}\circ T'\circ h = T,$$

indem man Σ und Σ' „konsistent orientiert":

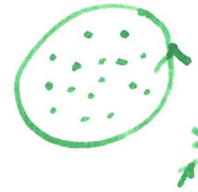
Verlange, dass die <u>Oberseiten</u> von Σ und Σ' ~~konsistent mit~~ die gleiche Orientierung auf $\partial\Sigma = \partial\Sigma' = K$ induzieren (die man vorher auf K gewählt hat.) $\blacksquare$

Hierzu Scheibe:

Oberseite

induziert diese Orientierung auf Rand,

Unterseite induziert



diese

$\cong$ (Umdrehen)

Das beweist Prop 5.1.

Bevor wir mit dem Beweis von Prop. 5.2 weitermachen, einige sehr nützliche und schöne Reinterpretationen der Verschlingungszahl einer 2-komp. Verschlingung.

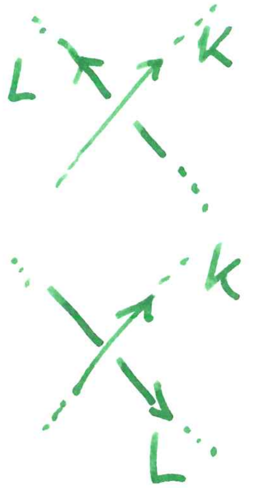
Sei K ein Knoten, Σ eine konsistent orientierte Seifert-Fläche und L ein orientierter Knoten in $S^3 \setminus K$.

Wir definieren folgende Zahlen:

(1.) $lk_{Diag.}(L, K) = \frac{1}{2} \cdot$ Anzahl der mit Vorzeichen Kreuzungen von L und K in einem regulären Diagramm für die Verschlingung $L \cup K$.

(= ursp. Def. von $lk(L, K)$)

(2.) $lk'_{Diag}(L,K)$ = Anzahl der Unterkreuzungen von L unter K, mit Vorzeichen gezählt

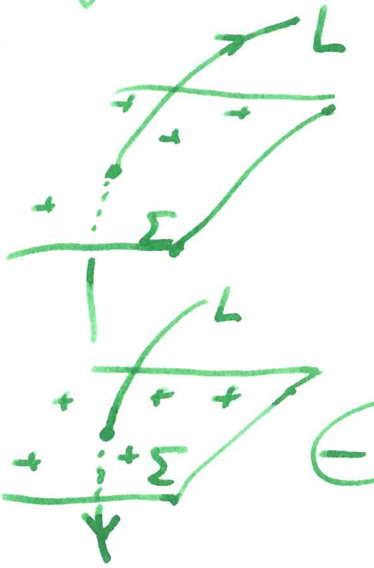


$+1$

-1

(3.) $lk_{Seif}(L,K)$ = Anzahl der ~~Kreuzungen~~ ~~von~~ Schnittpunkte von L mit Σ (*), mit Vorzeichen gezählt:

(*) in allgemeiner „Lage" zueinander, insb. ist $L \cap \Sigma$ endlich!



$+1$ (von Unterseite zu Oberseite ~~von~~ Σ)

-1 andersrum.

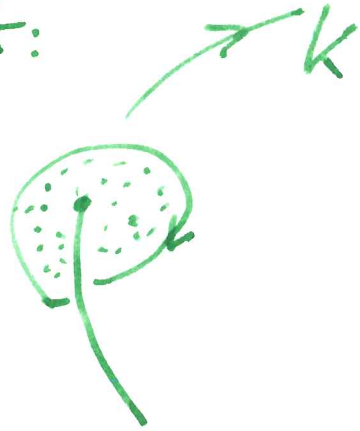
(4.) $lk_{abel}(L, K) = n$,

wobei

$$[L] = n \cdot [m]$$

in $\pi_1(S^3 \setminus K)_{ab} \cong \mathbb{Z}$,

wo m ein Erzeuger sei, der „positive Meridian" von K ist: m ist orientiert als Rand einer Meridianscheibe an K, die K <u>positiv</u> im Sinn von (3.) schneidet:



(5.) $lk_{\text{überl.}}(L, K) = n \in \mathbb{Z}$,

so dass wir für die Hochhebung $\tilde{L}$ von L in $X_\infty \xrightarrow{p} X \simeq S^3 \setminus K$, die im Punkt $\tilde{x}_0$ beginne, die Gleichung

$$\tau^n(\tilde{x}_0) = \tilde{L}(1)$$

Endpunkt der Hochhebung

(hier fassen wir L auf als

$$L : (S^1, *) \to (X, x_0)$$

$$S^1 = [0,1]/_{0 \sim 1}$$

.)

<u>Satz 5.3</u> Die Zahlen $lk_{\dots}$ in (1.)–(5.) stimmen überein.

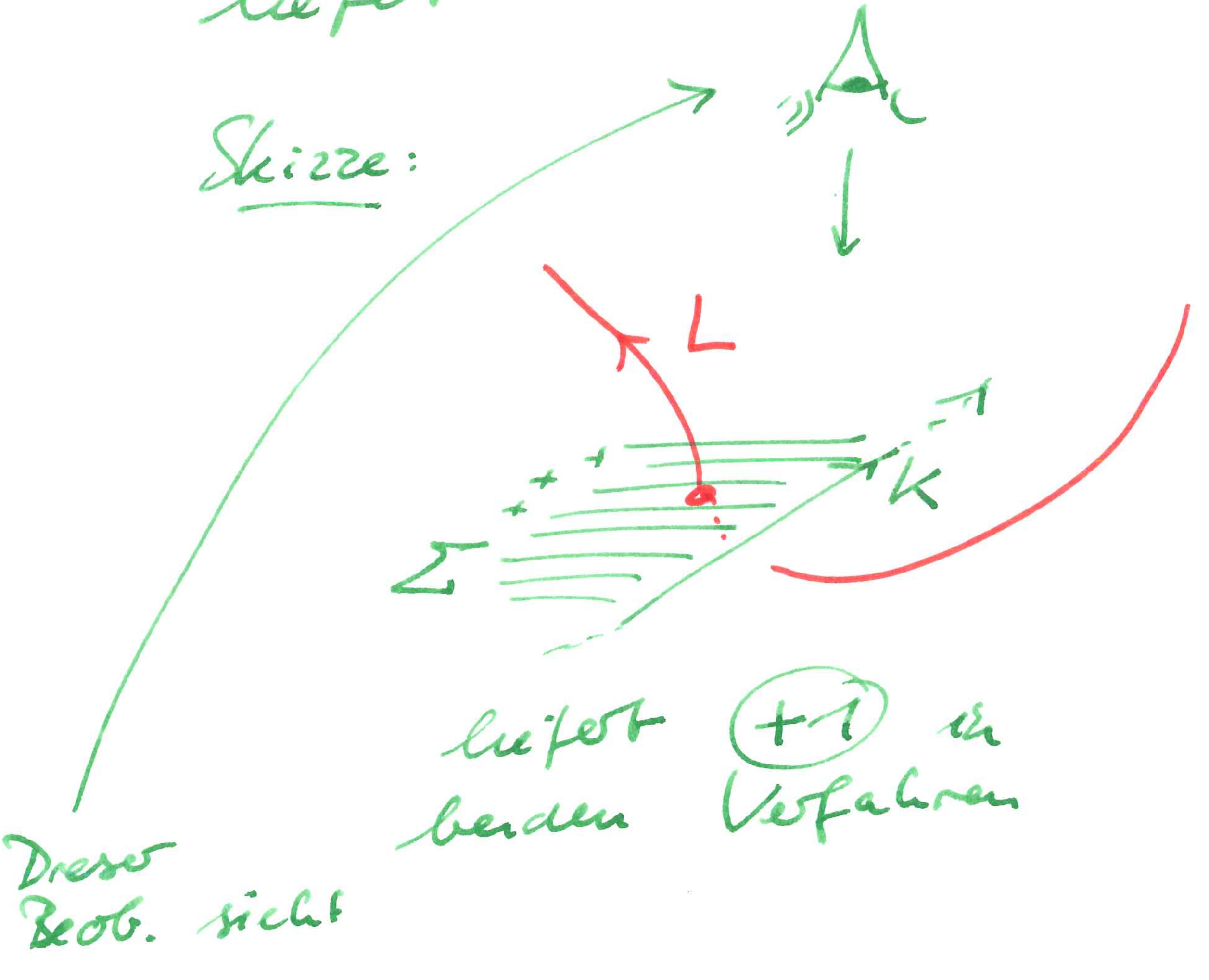
<u>Bemerkung</u>: $lk_{\text{Seif.}}$ und $lk_{\text{überl.}}$ scheinen a priori von der Wahl der Seifert-Fläche abzuhängen.

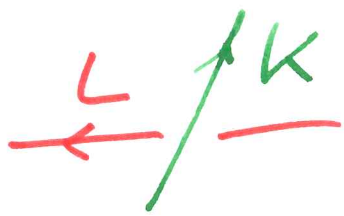
<u>Beweis</u>: • $lk_{Diag} = lk'_{Diag}$ Übung.

• $lk_{Seif}(L, K) = lk'_{Diag}(L, K)$,

wobei wir links die Seifert-Fläche nehmen, die der Seifert-Algorithmus liefert

<u>Skizze</u>:



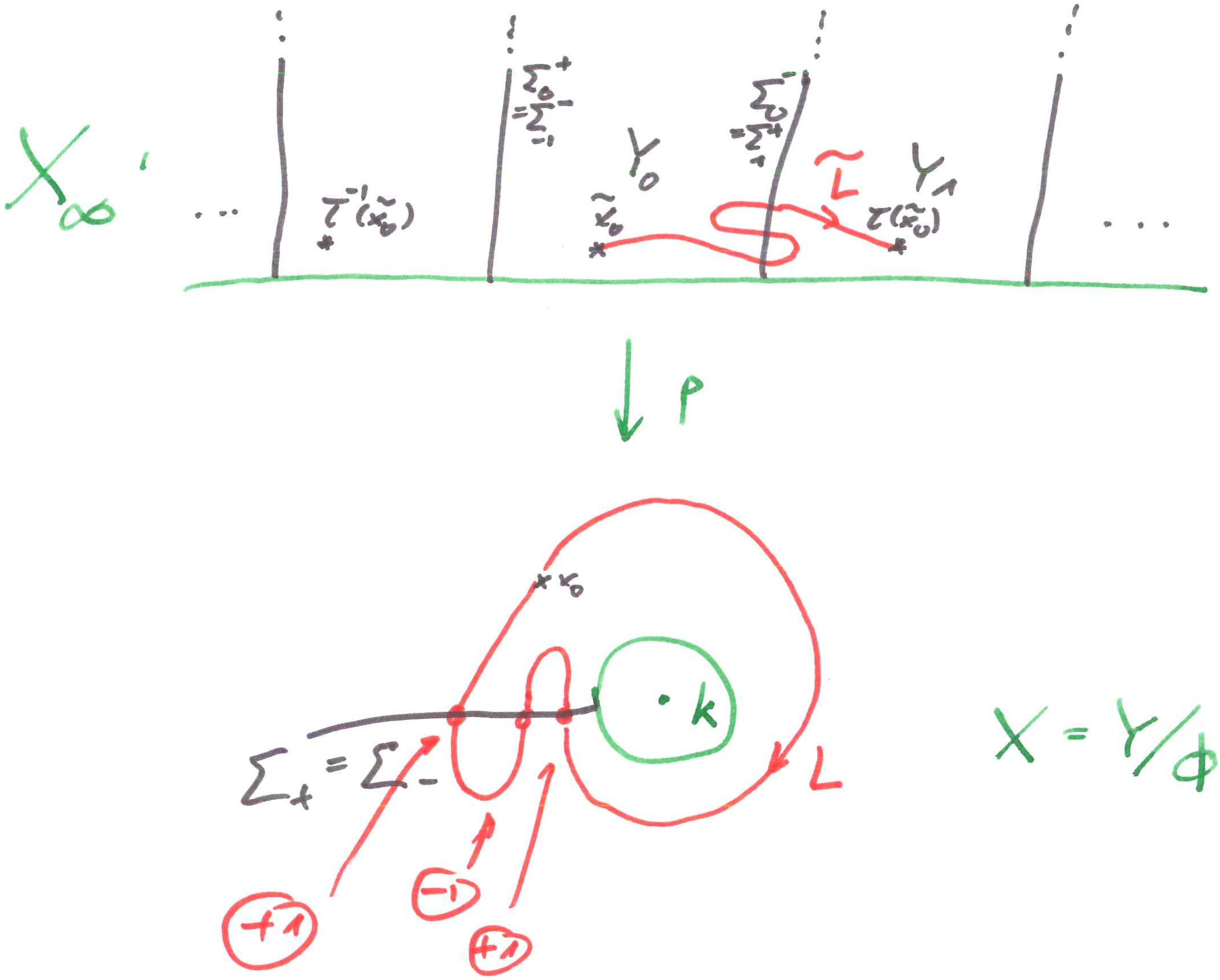


(+1) in lk'_{Diag}.

Entsprechend für (−1).

- $lk_{\text{Seif}}(L,K) = lk_{\text{übel.}}(L,K)$

sieht man so:



$X = Y/\phi$

In $\tau^n(\tilde{x}_0) = \tilde{L}(1)$ ist

n also die Zahl, mit Vorzeichen gezählt, wie oft $\tilde{L}$ von einem Y_i zu einem Y_{i+1} wechselt, was gleich $lk_{\text{Seif}}(L,K)$ ist.

Beide Zahlen hängen a priori von der Seifert-Fläche ab. Wegen den Argumenten im Beweis von Prop. 5.1 ~~[illegible]~~ ist aber

$lk_{\text{über.}}(L,K)$ unabhängig von der Wahl der Seifert-Fläche.

- $lk_{abel}(L,K) = lk_{\text{über.}}(L,K)$

kann man mittels obigem

$$\pi_1(X,x_0)\Big/ p_*\pi_1(X_{ab},\tilde{x}_0) \xrightarrow{\bar{D}} \mathrm{Aut}(p) \cong \langle\tau\rangle \cong \mathbb{Z}$$

$$\parallel$$

$$\pi_1(X,x_0)_{ab} = \pi_1(X,x_0)\Big/[\pi_1(X,x_0),\pi_1(X,x_0)] \cong \mathbb{Z}$$

Korollar der Wirtinger-Präs.

$$\parallel$$

$$H_1(X,x_0)$$

$\mathbb{Z}$ erzeugt von $[m]$

zeigen. ∎

Zum Beweis von ~~Satz~~ Prop 5.2

Wir benutzen folgendes alg. Lemma:

Lemma 5.4

ist

$$1 \to N \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H \to 1$$

eine kurze exakte Sequenz von Gruppen, d.h. ist
- f injektiv
- g surjektiv
- $\operatorname{im} f = \ker g$,

so ist nach Abelianisierung folgende Sequenz exakt:

$$N_{ab} \xrightarrow{f_{ab}} G_{ab} \xrightarrow{g_{ab}} H_{ab} \to 0,$$

d.h. $\ker g_{ab} = \operatorname{im} f_{ab}$ und g_{ab} ist surjektiv.

Abelianisierung ist ein rechts-exakter "Funktor" (in Funktorensprechweise).

Beweis:

Zunächst zur Erinnerung:

g_{ab} ist wie folgt gegeben:

Induz. Morph. g_{ab} *

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{g} & H \\ \text{Quot.-Abb.}\downarrow & & \downarrow \text{Quot.-Morph.} \\ G_{ab} & \xrightarrow{g_{ab}} & H_{ab} = H/[H,H] \end{array},$$

so dass dieses Diagramm kommutiert.

Quot $\circ\, g : G \to H_{ab}$ faktorisiert nach univ. Eig. der Abelianisierung (oder weil $[G,G]$ im Kern dieses Morph. liegen muss)

* Offenbar ist dann g_{ab} surjektiv, weil $H \to H_{ab}$ und $G \xrightarrow{g} H$ es sind.

* $g \circ f$ = triv. Hom. $N \to H$
$n \mapsto e_H$ $\forall n \in N$

e_H: Einheitselement

nach Voraussetzung

$$\Longrightarrow \quad 0 = (g \circ f)_{ab} = g_{ab} \circ f_{ab}$$

Funktor-Eig. von $(\ )_{ab}$

Also ist $\operatorname{im} f_{ab} \subseteq \ker g_{ab}$.

Wir schreiben $\bar{x}\ \bar{\bar{y}} \in G_{ab}$ für Äquivalenzklassen von Elementen $x, y \in G$ usw.

Zeige jetzt: $\operatorname{im} f_{ab} \supseteq \ker g_{ab}$.

Sei $\bar{x} \in G_{ab}$ mit $\bar{x} \in \ker g_{ab}$.

$g_{ab}(\bar{x}) = \overline{g(x)}$ nach Definition.

Also ist $g(x) \in [H, H]$.

Man sieht leicht: g bildet $[G, G]$ surjektiv auf $[H, H]$ ab.

Also gibt es ein $y \in [G, G]$ mit $g(y) = g(x)$. Also ist $g(xy^{-1}) = e_H$, und somit ist $xy^{-1} \in \operatorname{im}(f)$, weil $\ker g = \operatorname{im}(f)$. Sei also $n \in N$ mit $f(n) = xy^{-1}$. Es ist dann

(wegen $y^{-1} \in [G, G]$) $\overline{xy^{-1}} = \bar{x}$, also

$\overline{f(n)} = \bar{x} \iff f_{ab}(\bar{n}) = \bar{x}$.

Also ist $\bar{x} \in \operatorname{im} f_{ab}$. $\boxed{}$

<u>Übung:</u> ($\exists$ Beispiele aus Vorlesung, siehe Kapitel 5 und Anwendungen von Dehns'schem Lemma....)

Ist $N \xrightarrow{f} G$ injektiv, so ist nicht notwendigerweise

$$N_{ab} \xrightarrow{f_{ab}} G_{ab}$$

injektiv.

Wir „abelianisieren" nun den Satz von Seifert-van-Kampen: Das amalgamierte Produkt $G \underset{K}{*} H$ lässt sich in einer kurzen exakten Sequenz wie folgt darstellen, wobei $i_1 : K \to G$, $i_2 : K \to H$ die in der Notation unterdrückten Morphismen seien:

$$1 \to \underbrace{\langle\langle \{ i_1(k)\, i_2(k)^{-1} \mid k \in K \} \rangle\rangle}_{N} \to G * H$$

Inklusion als normale Untergruppe

$$\to G \underset{K}{*} H \to 1 ,$$

denn wir haben gerade $G \underset{K}{*} H$ definiert als $G * H / N$.

Man hat nun in kanonischer Weise

$$(G * H)_{ab} \cong G_{ab} \oplus H_{ab} .$$

direkte Summe von abelschen Gruppen.

Nach obigem Lemma erhalten wir eine exakte Sequenz

$$K_{ab} \xrightarrow{(i_1)_{ab} + (-(i_2)_{ab})} G_{ab} \oplus H_{ab} \xrightarrow{\binom{\text{Quot.-}}{\text{homom.}}_{ab}} (G \underset{K}{*} H)_{ab} \to 0 .$$

Prop 5.5:
Mit dem Satz von Seifert-van-Kampen ergibt sich daraus für $X = U \cup V$ wegzush., U, V offen, wegzush. und $U \cap V$ wegzush.: Die folgende Sequenz ist exakt.

$$\pi_1(U \cap V)_{ab} \xrightarrow{(i_U)_{ab} - (i_V)_{ab}} \pi_1(U)_{ab} \oplus \pi_1(V)_{ab} \xrightarrow{(j_U)_{ab} \oplus (j_V)_{ab}} \pi_1(X)_{ab} \to 0 ,$$

mit i_U, i_V, j_U, j_V den offensichtlichen Inklusionen (wir haben $(i_U)_* : \pi_1(U \cap V) \to \pi_1(U)$ usw. nicht geschrieben, um doppelte Indices zu vermeiden.).

Prop 5.6

Sei K ein Knoten in S^3 und Σ eine Seifert-Fläche von K. Dann gibt es genau eine bilineare Paarung

$$\beta : H_1(\Sigma) \times H_1(S^3 \setminus \Sigma) \to \mathbb{Z},$$

die die Verschlingungs-Paarung verallgemeinert, d.h. sind $c: S^1 \hookrightarrow \Sigma$, $d: S^1 \hookrightarrow S^3 \setminus \Sigma$ Einbettungen, so ist

$$\beta([c],[d]) = lk(c,d).$$

$H_1(\Sigma)$ und $H_1(S^3 \setminus \Sigma)$ sind bezüglich β dual zueinander, d.h.

$$H_1(\Sigma) \to \mathrm{Hom}(H_1(S^3 \setminus \Sigma), \mathbb{Z})$$
$$x \mapsto \beta(x, -)$$

$$H_1(S^3 \setminus \Sigma) \to \mathrm{Hom}(H_1(\Sigma), \mathbb{Z})$$
$$y \mapsto \beta(-, y)$$

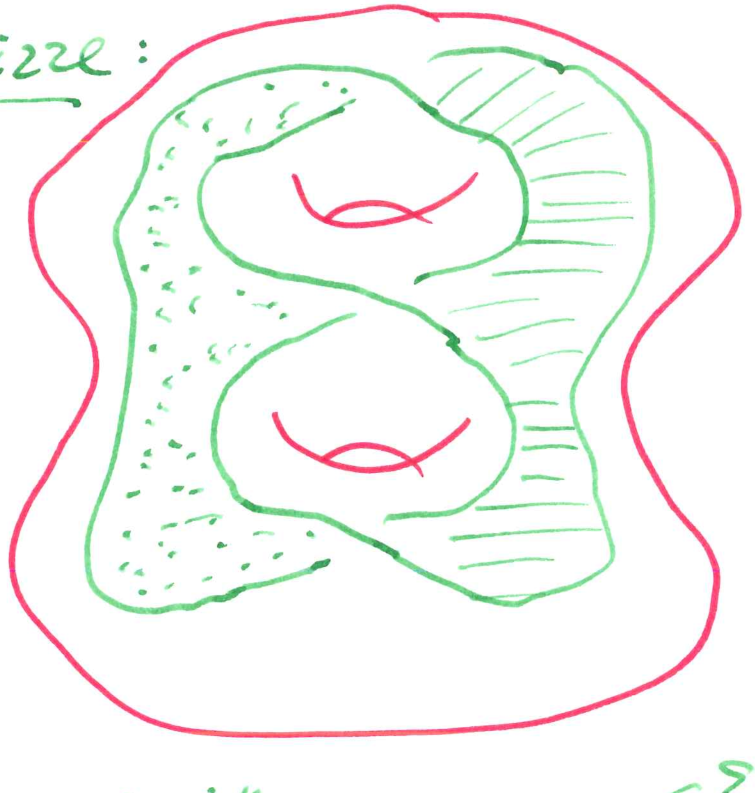
sind Isomorphismen.

Beweisskizze:

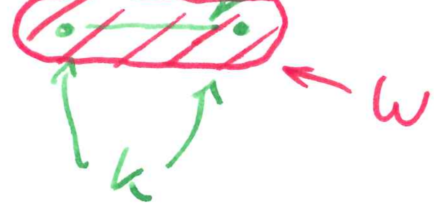
Wir wissen bereits: $H_1(\Sigma) \cong \mathbb{Z}^{2g}$, wobei g das Geschlecht von Σ ist. Wir zeigen zunächst, dass $H_1(S^3 \setminus \Sigma)$ nicht „größer" sein kann.

Zunächst gibt es einen 3-dim Henkelkörper $W \subseteq S^3$, der eine Deformationsretraktion $\mathring{W} \simeq \Sigma$ besitzt. Der Rand von W ist eine Fläche vom Geschlecht $2g$, d.h. $H_1(\partial W) \cong \mathbb{Z}^{4g}$.

Skizze:



Querschnitt:



Wir haben also eine Vereinigung

$$S^3 = \underbrace{S^3 \setminus \Sigma}_{\text{offen}} \cup \underbrace{\mathring{W}}_{\text{offen}} ,$$

und

$$S^3 \setminus \Sigma \cap \mathring{W} \underset{\substack{\text{Deformations-}\\ \text{äquivalenz}\\ \text{auf Rand}\\ \text{von } W.}}{\simeq} \partial W$$

Wendet man Prop 5.5, die „Abelianisierung des Seifert-van-Kampen-Satzes", auf $U = S^3 \setminus \Sigma$ und $V = \mathring{W}$ an, ergibt sich die exakte Folge

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \mathbb{Z}^{2g} \\ & & & & \cong \\ H_1(\partial W) & \xrightarrow{\Phi} & H_1(S^3 \setminus \Sigma) & \oplus & H_1(\Sigma) \\ \cong & & & & \\ \mathbb{Z}^{4g} & & & \longrightarrow & H_1(S^3) \\ & & & & \cong \\ & & & & 0 \end{array}$$

Damit also Φ surjektiv ist, muss der Rang von $H_1(S^3 \setminus \Sigma)$ kleiner gleich $2g$ sein.

wg. $\pi_1(S^3) = \{1\}$

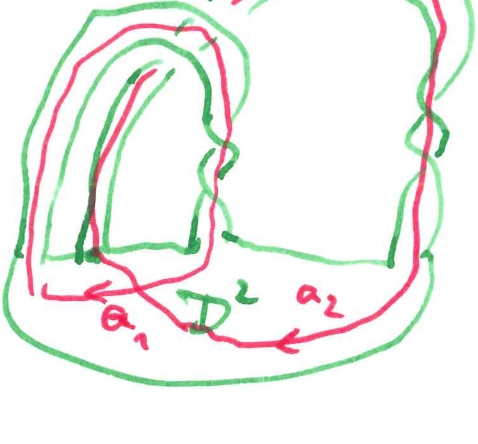
Aus obiger Charakterisierung der lk-Form (Satz 5.3) sieht man, dass $lk(c,d)$ wirklich nur von $[c] \in H_1(\Sigma)$, $[d] \in H_1(S^3_\Sigma)$ abhängt, d.h. sind c', d' ebenfalls entsprechend eingebettet und

$$[c] = [c'] \;,\; [d] = [d'],$$

so ist $lk(c,d) = lk(c',d')$.

Seien nun $a_i : S^1 \hookrightarrow \Sigma$, $i = 1, \ldots, 2g$ eingebettete ~~[illegible]~~ geschl. Kurven, so dass diese eine Basis von $H_1(\Sigma)$ induzieren. Etwas genauer: Sei Σ gegeben als $D^2 \cup 2g$ Bänder. Wähle die a_i so, dass jedes Band nur von einem dieser a_i durchlaufen wird.

Skizze:

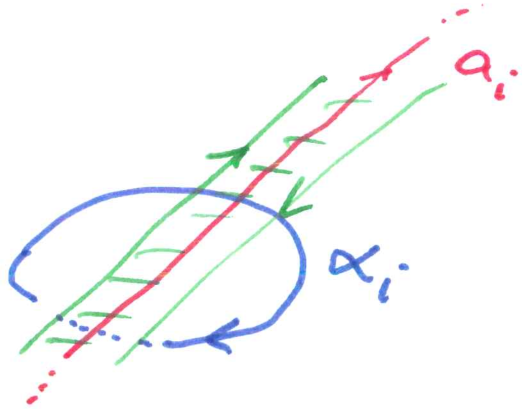


Sei α_i, $i = 1, \dots, 2g$

ein „Meridian" an das i-te

„Band":

(im Komplement $S^3 \setminus \Sigma$)



$$(*)$$

Es ist dann $lk(\alpha_i, a_j) = \delta_{ij}$

$$= \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $M := \operatorname{Spann}_{\mathbb{Z}} \{[\alpha_1], \dots, [\alpha_{2g}]\}$

$$\subseteq H_1(S^3 \setminus \Sigma).$$

~~Man sieht mit (*), dass~~ die

Nun definiert man eine Bilinearform

$$\beta : M \times H_1(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

durch lineare Fortsetzung der lk-Form, d. h. ist $[c] = \sum n_i [\alpha_i]$,

$[d] = \sum m_j [a_j]$,

so definiert man

$$\beta([c],[d]) := \sum n_i m_j \, lk(\alpha_i, a_j) = \sum n_i m_i \,.$$

Dass dies wohldefiniert ist, sieht man an (*), woraus folgt, dass die $[\alpha_1], \ldots, [\alpha_{2g}]$ linear unabhängig in $H_1(S^3 \setminus \Sigma)$ sind. [Übrigens lässt sich jedes Element in ~~[illegible]~~ $H_1(Y)$ durch eine eingebettetes $c : S^1 \hookrightarrow Y$ repräsentieren, wenn Σ eine 3-dim Mannigfaltigkeit ist. Daraus folgt die Eindeutigkeit von β mit der vorgeg. Eig.]

Wegen $\mathrm{Rang}(H_1(S^3 \setminus \Sigma)) \leq 2g$ und $\mathrm{Rang}(M) = 2g$ folgt nun auch $M = H_1(S^3 \setminus \Sigma)$.

$[a_1], \ldots, [a_{2g}]$ und $[\alpha_1], \ldots, [\alpha_{2g}]$ sind also Dualbasen bezüglich β, woraus die übrigen Beh. folgen. $\square$

Bemerkung:

Man könnte den Eindruck gewinnen, β hänge ab von der Wahl einer Basis, da diese Bilinearform ausgehend von einer Basis definiert ~~so definiert~~ wurde. Dass dies nicht so ist, folgt aus der homologischen Interpretation der lk-Zahlen. Die Wahl der ~~Basis~~ $a_i : S^1 \to \Sigma$ mit der angegebenen Eigenschaft, je ein Mal durch ein „Band" zu laufen, erleichterte lediglich das Auffinden der ~~Basiselem.~~ Elemente $\alpha_i : S^1 \to S^3 \setminus \Sigma$, die eine Basis von $H_1(S^3 \setminus \Sigma)$ bildeten.

Korollar 5.7:

Ist $c: S^1 \hookrightarrow S^3 \setminus \Sigma$ eine eingebettete Kurve, so ist in $H_1(S^3 \setminus \Sigma)$

$$[c] = \sum_{i=1}^{2g} lk(c, a_i) \cdot [\alpha_i]$$

bezüglich ~~der~~ Basen $[a_1], \dots, [a_{2g}]$ von $H_1(\Sigma)$ und $[\alpha_1], \dots, [\alpha_{2g}]$ von $H_1(S^3 \setminus \Sigma)$, wie sie ~~der~~ im Beweis von Prop 5.6 ~~definiert~~ gewählt wurden.

Beweis: Für alle i ist:

$$\beta([c], [a_i]) = lk(c, a_i).$$

Andererseits ist

$$\beta\Big(\sum_{j=1}^{2g} lk(c, a_j) \cdot [\alpha_j], [a_i]\Big)$$

$$\overset{\text{Def'n}}{\underset{\text{von } \beta}{=}} \sum_{j=1}^{2g} lk(c, a_j) \underbrace{\beta([\alpha_j], [a_i])}_{\substack{= lk(\alpha_j, a_i) \\ = \delta_{ji}}}$$

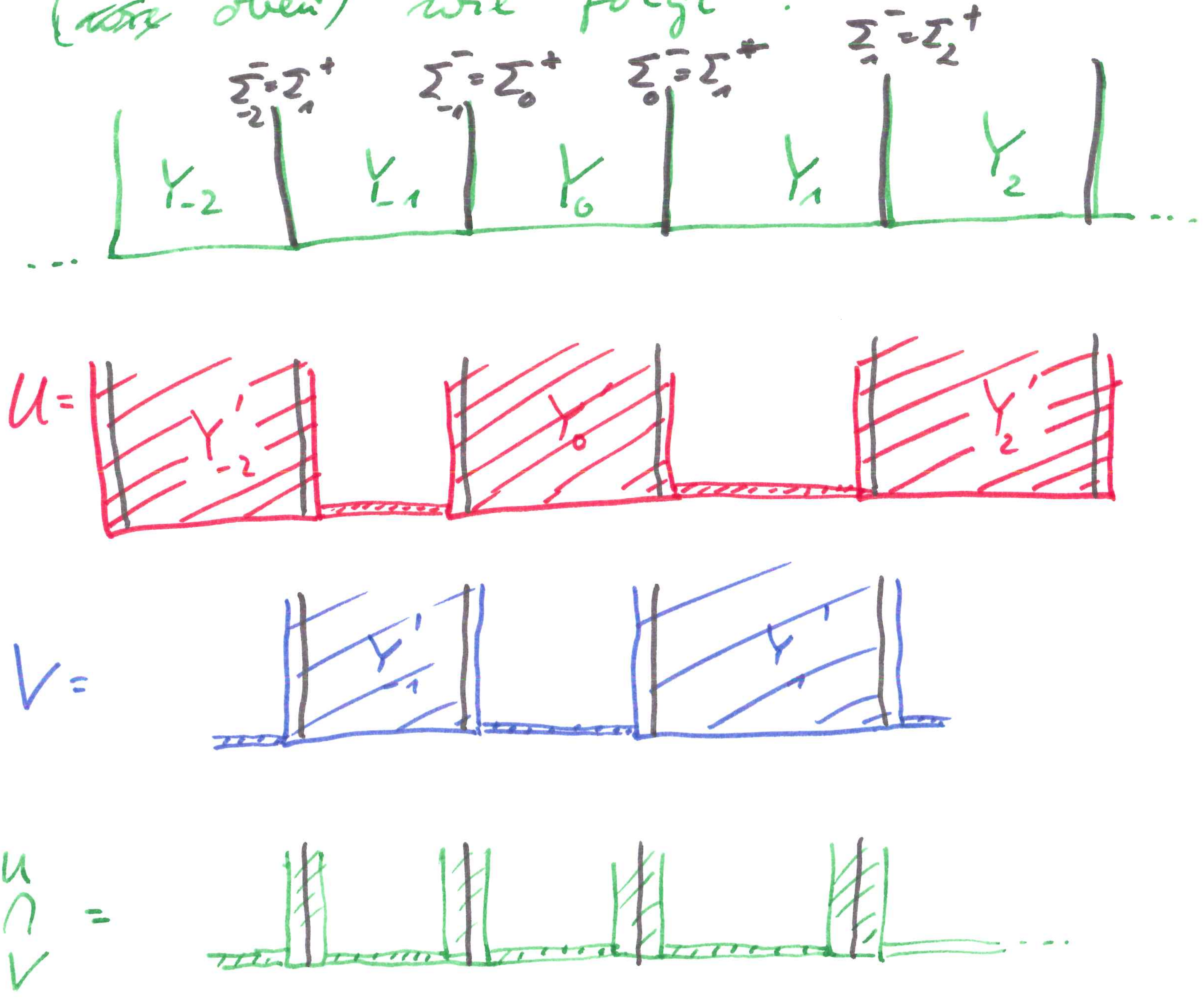
$$= lk(c, a_i).$$

Aus der Dualität folgt nun die behauptete Formel. $\square$

Wir wenden Prop 5.5 an auf

$$X_\infty = \left(\coprod_{i\in\mathbb{Z}} Y_i\right)\Big/\sim$$

(~~[illegible]~~ definiert oben) wie folgt :



Erläuterungen:

- Y_i' ist Y_i ergänzt um eine Umgebung der Form $(-1,0]\times\Sigma_i^+$ von Σ_i^- sowie einer Umg. der Form $[0,1)\times\Sigma_i^{*-}$ von Σ_i^-.

- Die horizontalen Segmente

~~[illegible]~~

deuten ~~Tubenumgebung~~ Verbindungen an, die sich aus einer $D^2\times S^1$-Umgebung eines Meridians an den Knoten K ergeben. (wird zu $D^2\times I$ nach Aufschneiden entlang Σ)

- $U\cap V$ besteht aus „$\mathbb{Z}$ vielen" Umgebungen der Form $(-1,1)\times\Sigma_i$, die wie gerade eben beschrieben verbunden werden, dabei
- identifizieren wir Σ_i mit Σ_i^-

Man zeigt leicht, dass

$$H_1(U) \cong \bigoplus_{i \in 2\mathbb{Z}} H_1(Y_i')$$

$$H_1(V) \cong \bigoplus_{i \in 2\mathbb{Z}+1} H_1(Y_i') ,$$

induziert von den Inklusionen

$$\coprod_{i \in 2\mathbb{Z}} Y_i' \hookrightarrow U \quad \text{und} \coprod_{i \in 2\mathbb{Z}+1} Y_i' \hookrightarrow V .$$

Ebenso: $H_1(U \cap V) \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H_1(\Sigma_i)$.

$H_1(U)$ und $H_1(V)$ werden durch τ zu keinem $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-Modul, so jedoch $H_1(U) \oplus H_1(V)$, wo Mult. mit t die Summanden „vertauscht". $H_1(U \cap V)$ ist dagegen natürlicherweise ~~ein~~ mit τ ein $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-Modul.

Als $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-Modul hat dann $H_1(U \cap V)$ eine Basis gegeben durch $[a_1], \dots, [a_{2g}] \in H_1(\Sigma_0)$,

~~und $H_1(U) \oplus H_1(V)$ hat eine~~ $\|$

~~Basis gegeben durch $[\alpha_1], \dots$~~ Σ_0^-

Ein Element $[c] \in H_1(\Sigma_i)$ ~~lässt sich also~~ schreibt sich dann als Linearkombination (über $\mathbb{Z}$) in $t^i[a_1], \dots, t^i[a_{2g}]$.

Das oben konstruierte Y ~~lässt sich schreiben~~ ist homotopieäquivalent zu

$$Y'' := (S^3 \setminus V) \setminus \Sigma \times (-1,1)$$

V: Volltorusumgebung von K

$\Sigma \times (-1,1)$: Umgebung von Σ

Querschnitt:

Andererseits ist die Inklusion

$$Y'' \hookrightarrow S^3 \setminus \Sigma$$

eine Homotopieäquivalenz, wie anschaulich klar ist.

Mit Proposition 5.6 erhalten wir eine Basis $[\alpha_1], \dots, [\alpha_{2g}]$ von Y'' bzw. $Y' \simeq Y$, sobald wir wie oben eine Basis $[a_1], \dots, [a_{2g}]$ gewählt haben.

[Man kann die „Meridiane" α_i an die a_i „weit genug weg" in Y'' legen, so dass sie unter der Deformationsretraktion ~~äquivalenz~~

$$S^3 \setminus \Sigma \longrightarrow Y''$$

in sich überführt werden.]

Jedes Y_i' oben ~~ist~~ kann mittels der ~~Ide~~ ~~Identifizierer~~ Homöomorphismen h_i mit $Y' \simeq Y$ identifiziert werden. Wir wissen, dass aus Prop 5.6 folgt

$$H_1(Y) \simeq \mathbb{Z}^{2g},$$

wobei wir eine Basis gegeben haben durch die $[\alpha_1], \dots, [\alpha_{2g}]$.

Als $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$-Modul können wir $H_1(U) \oplus H_1(V) \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} H_1(Y_i')$

also mit der Basis $[\alpha_1],\dots,[\alpha_{2g}] \in H_1(Y_0')$ versehen, d.h. als abelsche Gruppe hat

$H_1(U)\oplus H_1(V)$ eine Basis,

die aus $\{t^i[\alpha_j] \mid j\in 1,\dots,2g, i\in\mathbb{Z}\}$

besteht, als $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$-Modul ist $H_1(U)\oplus H_1(V)$ jedoch endlich-dimensional von Dimension $2g$.

In diesen Basen wollen wir nun zum Abschluss den Morphismus

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{Z}[t,t^{-1}]^{2g} \\ & & \cong \\ H_1(U\cap V) & \xrightarrow{(i_U)_{ab}-(i_V)_{ab}} & H_1(U)\oplus H_1(V) \\ \cong & & \\ \mathbb{Z}[t,t^{-1}]^{2g} & & \to H_1(X_\infty) \end{array}$$

aus Prop. 5.5 verstehen.

Damit dies sinnvoll ist, überzeuge man sich zunächst, dass $(i_u)_{ab} - (i_v)_{ab}$ tatsächlich ein Morphismus von $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-Moduln ist!

(Übung!)

Es ist

$$\underbrace{(i_U)_{ab}([a_i])}_{\Downarrow\; H_1(\Sigma_0)} = \underbrace{[a_i^-]}_{\in H_1(Y_0')}$$

Andererseits ist

$$(i_V)_{ab}([a_i]) = \underbrace{t \cdot \overbrace{[a_i^+]}^{\in H_1(Y_0') \text{ in unserer Basis}}}_{\in H_1(Y_1') = t \cdot H_1(Y_0')} .$$

[Man muss sich klarmachen, dass die Inklusion von $\Sigma_0 = \Sigma_0^- = \Sigma_1^+$ nach $Y_0' \subseteq U$ als Σ_0^- geschieht, als Inklusion nach $Y_1' \subseteq V$ jedoch als Σ_1^+ !]

Nun drücken wir noch $[a_i^-]$ und $t \cdot [a_i^+]$ in ~~den~~ obigen Basen von $H_1(U) \oplus H_1(V)$ aus.

Nach Korollar 5.7 ist

$$[a_i^-] = \sum_{j=1}^{2g} lk(a_i^-, a_j) \cdot [\alpha_j]$$

und

$$[a_i^+] = \sum_{j=1}^{2g} lk(a_i^+, a_j) \cdot [\alpha_j]$$

$$\overset{\text{Symmetrie von } lk}{=} \sum_{j=1}^{2g} lk(a_j, a_i^+) \cdot [\alpha_j]$$

$$\overset{\text{Isotopie}}{=} \sum_{j=1}^{2g} lk(a_j^-, a_i) \cdot [\alpha_j].$$

Zusammenfassend:

$$(i_u)_{ab} - (i_v)_{ab} ([a_i]) = [a_i^-] - t [a_i^+]$$

$$= \sum_{j=1}^{2g} \Big(\underbrace{lk(a_i^-, a_j)}_{= v_{ij}} - t \overbrace{lk(a_j^-, a_i)}^{= v_{ji}}\Big) \cdot [\alpha_j]$$

In den obigen Basen ist $(i_u)_{ab} - (i_v)_{ab}$ also durch die Matrix

$$-tV + V^T$$

ausgedrückt. Dies beweist Prop 5.2. $\square$