Universität zu Köln
Mathematisches Institut

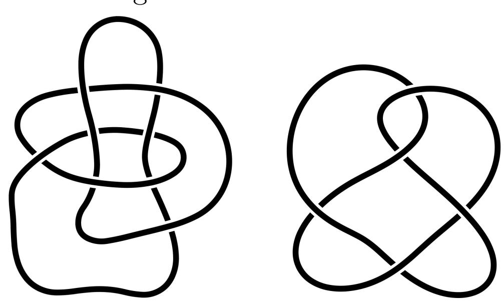
WS 2012/2013
Einführung in die Knotentheorie

1. Übungsblatt

Dr. Raphael Zentner

Die mit einem (K) versehenen Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und spätestens am Mittwoch, dem 17. Oktober in der Vorlesung abzugeben.

Aufgabe 1. Welcher der folgenden Knoten ist 3-färbbar?



Aufgabe 2 (K). Sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl. Wir sagen, ein Knotendiagramm ist n-färbbar, wenn man jedem Segment ein Element im Restklassenring $\mathbb{Z}/n$ zuordnen kann, eine 'Färbung des Segments', so dass folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Treffen an einer Kreuzung die zwei unterkreuzenden Segmente mit Färbung a und b sowie ein überkreuzendes Segment mit Färbung c aufeinander, so gilt
$$a + b = 2 \cdot c \quad \text{im Ring } \mathbb{Z}/n.$$
(ii) Im gesamten Diagramm treten mindestens zwei Farben auf.

Bearbeiten Sie folgende beiden Fragen:

(a) Inwiefern verallgemeinert der Begriff der n-Färbbarkeit den Begriff der 3-Färbbarkeit aus der Vorlesung?
(b) Zeigen Sie, dass die Bedingung der n-Färbbarkeit eines Knotendiagramms invariant unter Reidemeister-Bewegungen ist, und somit nach dem Satz in der Vorlesung eine Eigenschaft des Knotens ist, die nicht vom gewählten Diagramm des Knotens abhängt.
(c) Welcher der Knoten in Aufgabe 1 ist 4-färbbar?

Aufgabe 3 (K). In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass der Begriff der Färbbarkeit von Knotendiagrammen ausreichend ist, um die Existenz unendlich vieler paarweise verschiedene Knoten zu gewährleisten.

(a) Gegeben sei der $(2, n)$ Torusknoten $T(2, n)$ mit $n \geq 3$ und ungerade. Man zeige, dass dieser n-färbbar ist.
(b) Ist der Knoten $T(2, 3)$ auch 5-färbbar?
(c) Für welche $k < n$ mit k ungerade ist $T(2, k)$ auch n-färbbar? Hinweis: Beachten Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}/n$ nicht zwingend nullteilerfrei ist.
(d) Man beweise nun, dass es unendliche viele paarweise verschiedene Knoten gibt.

Aufgabe 4. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass die '1-Punkt-Kompaktifizierung' von $\mathbb{R}^n$ homöomorph zur Sphäre S^n ist. $\mathbb{R}^n$ sei dabei mit der Standard-Topologie versehen.

Sei $X = \mathbb{R}^n \cup \{*\}$, d.h. die disjunkte Vereinigung von $\mathbb{R}^n$ und einer Menge, die aus nur einem Punkt $*$ besteht. Ist K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, so definieren wir $V_K := X \setminus K$. Auf X definieren wir nun ein Mengensystem:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} :=& \{U \mid U \text{ ist offen in } \mathbb{R}^n\} \\ & \cup \{V_K \mid K \text{ ist kompakt in } \mathbb{R}^n\} . \end{aligned}$$

(a) Man zeige, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X definiert, so dass X ein Hausdorff-Raum ist.
(b) Mit Hilfe von 'stereographischer Projektion' (man suche z.B. auf Wikipedia oder formuliere die in der Vorlesung gegebene Skizze aus) definiere man eine Abbildung von S^n nach X, und zeige, dass diese bijektiv und stetig ist.
(c) Man zeige, dass S^n und X sogar homöomorph sind. Hinweis: S^n ist kompakt und X ist ein Hausdorff-Raum.