10. Übungsblatt

Dr. Raphael Zentner

Die mit einem (K) versehenen Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und spätestens am Mittwoch, dem 19. Dezember um 13 Uhr in den Briefkasten einzuwerfen oder am Mittwoch Morgen in der Vorlesung abzugeben.

Aufgabe 1 (K).

(a) Man gebe eine Präsentierung der Gruppen $\mathbb{Z}/n$, $\mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/m$, $\mathbb{Z}^2$ und $\mathbb{Z}^3$ an, wobei $n, m \geq 1$.

(b) Man zeige, dass die Gruppe $\langle x, y \,|\, x\, y\, x^{-1}\, y \rangle$ nicht abelsch ist. Hinweis: Die symmetrische Gruppe S_3 (oder Gruppe der Permutationen von 3 Elementen) ist nicht abelsch. Man finde einen surjektiven Homomorphismus nach S_3.

(c) Die Gruppen $\langle x, y \,|\, x\, y\, x = y\, x\, y \rangle$ und $\langle a, b \,|\, a^2 = b^3 \rangle$ sind isomorph.

Aufgabe 2 (K). In der Vorlesung hatten wir die 3-Sphäre aufgefasst als

$$S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 |\, |z|^2 + |w|^2 = 1\}$$

und die Einbettung $k : S^1 \to S^3$ betrachtet, die durch die Formel $k(\zeta) = (0, \zeta)$ gegeben ist, wobei hier S^1 aufgefasst ist als Einheitskreis in $\mathbb{C}$. Analog betrachten wir eine Einbettung $l : S^1 \to S^3$ gegeben durch $l(\zeta) = (\zeta, 0)$.

(a) Man zeige, dass k und l triviale Knoten sind.

(b) Man zeige, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} S^3 \setminus k(S^1) &\to S^1 \times \mathbb{C} \\ (z, w) &\mapsto \left(\frac{z}{|z|}, w \right) \end{aligned}$$

wohldefiniert ist und einen Homöomorphismus auf das Bild definiert. Man zeige außerdem, dass dieses Bild ein Volltorus ist.

(c) Man zeige, dass eine Deformationsretraktion von $S^3 \setminus (k(S^1) \cup l(S^1))$ auf den Torus

$$T = \{(z, w) \in S^3 |\ |z|^2 = 1/2, |w|^2 = 1/2\}$$

existiert.

Aufgabe 3*. Was für eine Verschlingung ist die zweikomponentige Verschlingung in S^3, die aus dem Bild obiger k und l besteht (die natürlich disjunktes Bild haben)?