11. ÜBUNGSBLATT

Dr. Raphael Zentner

Die mit einem (K) versehenen Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und spätestens am Donnerstag, dem 10. Januar um 13 Uhr in den Briefkasten einzuwerfen oder am Mittwoch Morgen in der Vorlesung abzugeben.

Aufgabe 1 (K). Gegeben seien drei Gruppen G_0, G_1 und G_2 mit Präsentierungen

$$\begin{aligned} &\langle\, x_1, \ldots, x_n \,|\, r_1, \ldots, r_m \,\rangle, \\ &\langle\, y_1, \ldots, y_k \,|\, s_1, \ldots, s_l \,\rangle, \\ &\langle\, z_1, \ldots, z_p \,|\, t_1, \ldots, t_q \,\rangle \;. \end{aligned}$$

Seien außerdem zwei Homomorphismen $i_1 : G_0 \to G_1$ und $i_2 : G_0 \to G_2$ gegeben. Man zeige, dass das amalgamierte Produkt $G_1 *_{G_0} G_2$ eine Prsëntierung hat, die durch

$$\begin{aligned} &\langle\, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k \,| \\ &\qquad r_1, \ldots, r_m, s_1, \ldots, s_l, i_1(z_1)i_2(z_1)^{-1}, \ldots, i_1(z_p)i_2(z_p)^{-1} \,\rangle \end{aligned}$$

gegeben ist.

Aufgabe 2 (K). Gegeben sei eine 2-komponentige Verschlingung L mit Komponenten K_1 und K_2, so dass sich K_1 in einem 3-dimensionalen Ball $B \subseteq S^3$ befindet, und so dass sich K_2 im Komplement B' von B befindet (was nach dem Satz von Schönflies wieder ein Ball ist).

(a) Die Inklusion $B \setminus K_1 \hookrightarrow S^3 \setminus K_1$ induziert einen Isomorphismus zwischen Fundamentalgruppen. Entsprechendes gilt dann natürlich für $B' \setminus K_2 \hookrightarrow S^3 \setminus K_2$. Hinweis: Man kann hier den Satz von Seifert - van Kampen geeignet anwenden.

(b) Was lässt sich über die Fundamentalgruppe von $S^3 \setminus L$ in Abhängigkeit von den Fundamentalgruppen von $S^3 \setminus K_1$ und $S^3 \setminus K_2$ sagen? Hinweis: Man kann hier den Satz von Seifert - van Kampen geeignet anwenden, wenn man die vorherige Aufgabe benützt.

(c) Was ist die Fundamentalgruppe des Komplements der trivialen 2-komponentigen Verschlingung, bestehend aus zwei trivialen Knoten, die sich in zwei disjunkten Bällen B und $S^3 \setminus B$ befinden?

(d) Die Verschlingung $L \subseteq S^3$, die aus den beiden unverknoteten Komponenten k und l aus Aufgabe 2 des 10. Übungsblattes besteht, ist verschieden von der trivialen 2-komponentigen Verschlingung.

Aufgabe 3 (K). Sei G eine Gruppe und $[G, G]$ die Menge der Elemente, die man als Produkte von Elementen der Form $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$ schreiben kann.

(a) Man zeige, dass $[G, G]$ eine normale Untergruppe von G ist.
(b) Man zeige, dass der Quotient $G_{ab} := G/[G, G]$ abelsch ist. Dieser Quotient wird übrigens auch als Abelianisierung oder Abelschmachung von G bezeichnet.
(c) Welche universelle Eigenschaft erfüllt G_{ab} zusammen mit dem kanonischen Epimorphismus $G \to G_{ab}$? (Man beweise diese dann auch.)

Aufgabe 4*. Die Fundamentalgruppe des Komplements des Torusknotens $T(p, q)$ (wobei die Zahlen $p, q \geq 1$ zueinander koprim seien) hat eine Präsentation, die durch

$$G_{p,q} := \langle\, x, y \mid x^p = y^q \,\rangle$$

gegeben ist.

(a) Die Gruppe $G_{p,q}$ ist isomorph zu $G_{q,p}$. Was bedeutet dies geometrisch?
(b) Sei im Folgenden ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p \leq q$. Man zeige, dass das Element $x^p = y^q$ im Zentrum von $G_{p,q}$ liegt. Sei C die von x^p erzeugte Untergruppe. Wieso ist diese normal?
(c) Man zeige, dass $G_{p,q}/C$ isomorph zum freien Produkt

$$\langle\, x \mid x^p \,\rangle * \langle\, y \mid y^q \,\rangle$$

ist, welches isomorph zu $\mathbb{Z}/p * \mathbb{Z}/q$ ist.
(d) Das Zentrum Z von $G_{p,q}$ ist isomorph zu C.
(e) Man zeige: Für ein Paar von zueinander koprimen positiven ganzen Zahlen (p', q') mit $p' \leq q'$ und $(p, q) \neq (p', q')$ ist $G_{p,q}$ nicht isomorph zu $G_{p',q'}$. Hätte man zu dieser Schlussfolgerung auch kommen können, ohne zu wissen, dass C das Zentrum von $G_{p,q}$ ist?
(f) Was für eine Aussage ergibt sich aus den Ergebnissen in dieser Aufgabe für Torusknoten?