12. Übungsblatt

Dr. Raphael Zentner

Die mit einem (K) versehenen Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und spätestens am Donnerstag, dem 17. Januar um 13 Uhr in den Briefkasten einzuwerfen oder am Mittwoch Morgen in der Vorlesung abzugeben.

Aufgabe 1 (K). Die Diedergruppe D_{2n} ist gegeben durch die Präsentation

$$\langle\, z, y \,|\, z^n, y^2, y\, z\, y^{-1}\, z \,\rangle \; .$$

Zur Erinnerung: Ein Knotendiagramm D heißt n-kolorierbar, wenn man jedem Segment s ein Element in $c(s) \in \mathbb{Z}/n$ zuordnen kann, so dass an jeder Kreuzung, wo Segmente $i, i+1$ und k aufeinandertreffen, die Gleichung

$$c(i) + c(i+1) = 2c(k)$$

erfüllt ist, und so dass die Funktion c mindestens zwei verschiedene Werte annimmt. Sei

$$\langle\, x_1, \ldots, x_m \,|\; r_1, \ldots, r_m \,\rangle$$

die Wirtinger-Präsentation der Knotengruppe $\pi_1(S^3 \setminus K, *)$ zum Diagramm D.

(a) Sei c eine n-Färbung des Diagramms D. Man zeige, dass

$$x_i \mapsto y\; z^{c(i)}$$

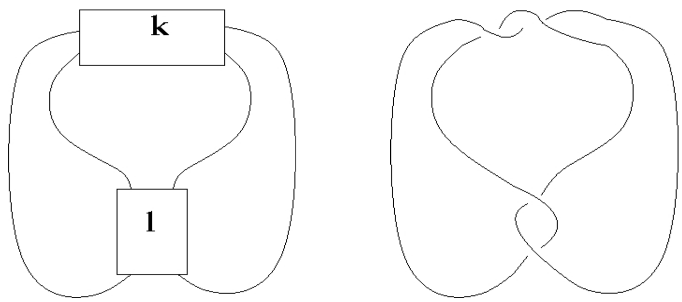
einen Gruppenhomomorphismus $\rho : \pi_1(S^3 \setminus K, *) \to D_{2n}$ induziert. Hat dieser nicht-abelsches Bild?

(b) Sei $\rho : \pi_1(S^3 \setminus K, *) \to D_{2n}$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Man zeige, dass dann der Knoten K auch n-färbbar ist.

(c) Wieviele Elemente hat die Gruppe D_{2n}? (Beweis!)

Die Diedergruppe D_{2n} ist übrigens die Symmetriegruppe eines regulären n-Ecks in der euklidischen Ebene. Der Erzeuger y entspricht in dem Fall einer Spiegelung, während der Erzeuger x einer Drehung um $\frac{2\pi}{n}$ entspricht.

Aufgabe 2 (K). Seien im folgenden k, l zwei von 0 verschiedene ganze Zahlen. Den Knoten, der durch das linke der beiden folgenden Diagramme dargestellt ist, wollen wir mit $A(k, l)$ bezeichnen.



Dabei folgen wir wie früher der Konvention, dass das mit k bezeichnete Kästchen zwei Stränge enthält, die sich, je nach Vorzeichen, im oder gegen den Uhrzeigersinn $|k|$ halbe Mal umeinander winden. Auf der rechten Seite ist beispielsweise der Achterknoten $A(2, -2)$ dargestellt. Der rechtshändige Kleeblattknoten wäre mit dieser Notation der Knoten $A(2, -1)$, der linkshändige der Knoten $A(-2, 1)$.

Für k, l ungerade handelt es sich hier um eine 2-komponentige Verschlingung, weswegen wir im folgenden k gerade annehmen wollen.

(a) Man zeige, dass der Knoten $A(k, l)$ eine Präsentation der Fundamentalgruppe des Knotenkomplements mit nur 2 Erzeugern besitzt. Hinweis: Wirtinger-Präsentation.

(b) Für welche Paare k, l gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass man einen Homomorphismus der Fundamentalgruppe des Knotenkomplements von $A(k, l)$ in die Diedergruppe D_{2n} mit nicht-abelschem Bild findet?

Aufgabe 3*. Seien K und L zwei orientierte Knoten. Sei $M := -\overline{L}$ der Knoten, der das Spiegelbild $\overline{L}$ des unorientierten Knotens L ist, und der die entgegengesetzte Orientierung habe zu jener, die sich durch Spiegelung aus der ursprünglichen ergibt.

(a) Man zeige, dass die Fundamentalgruppen $\pi_1(S^3 \setminus (K + L))$ und $\pi_1(S^3 \setminus (K + M))$ isomorph sind. Hinweis: Es gibt eine eingebettete 2-Sphäre in S^3, die diese Summe induziert. Im resultierenden Ball, der (bis auf ein triviales Ball-Strang-Paar) L enthält, gibt es eine Spiegelung, die L in $\overline{L}$ überführt, und die beiden Schnittpunkte von $K + L$ mit der 2-Sphäre vertauscht. Man benutze den Satz von Seifert und van-Kampen auf eine Art, die der Knotensumme Rechnung trägt.

(b) Man zeige, dass $K + L$ und $K + M$ im Allgemeinen verschiedene Knoten sind, die auch nicht Spiegelbilder zueinander sind. Hinweis: Jones-Polynom.