13. ÜBUNGSBLATT

Dr. Raphael Zentner

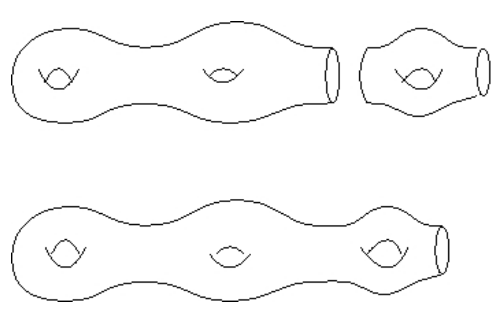
Die mit einem (K) versehenen Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und spätestens am Donnerstag, dem 24. Januar um 13 Uhr in den Briefkasten einzuwerfen oder am Mittwoch Morgen in der Vorlesung abzugeben. Bei Bedarf an zusätzlichen Punkten kann fakultativ auch Aufgabe 2 abgegeben werden (d.h. man kann in diesem Blatt 12 von 8 Punkten erreichen).

Hinweis. Zur Überprüfung der Rechnungen in diesem Übungsblatt sei auf folgende beiden Tatsachen hingewiesen, die in der Vorlesung erst nächste Woche gezeigt werden:

- Das Alexander-Polynom eines Knotens K erfüllt $\Delta(1) = \pm 1$.
- Das Alexander-Polynom eines Knotens K erfüllt $\Delta(-1) \in 2\mathbb{Z} + 1$.

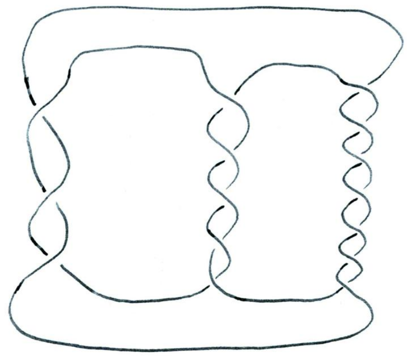
Aufgabe 1 (K). Man beweise Proposition VI.1.1 und Proposition VI.1.2 aus der Vorlesung mit Induktion über das Geschlecht mitteils des Satzes von Seifert und van Kampen.

Hinweis: Man erhält eine Fläche von Geschlecht g, bei der eine offene Scheibe fehlt (die also eine Randkomponente hat), indem man an eine Fläche von Geschlecht $g-1$ einen Torus anklebt, aus dem zwei Scheiben entfernt wurden. Dies ist im folgenden für eine Fläche von Geschlecht 2 dargestellt, um zu einer von Geschlecht 3 zu gelangen:



Aufgabe 2. Man berechne das Alexander-Polynom der Knoten 4_1 und 5_2.

Aufgabe 3 (K). Die Bretzelknoten $P(p_1, \ldots, p_n)$ wurden in der Vorlesung eingeführt. Das folgende Diagramm zeigt den Bretzelknoten $P(3, -5, -7)$.



(a) Für ungerade Zahlen p, q, r zeige man, dass das Alexander-Polynom der Bretzelknoten $P(p, q, r)$ gegeben ist durch

$$\Delta_{P(p,q,r)}(t) = \frac{1}{4}\left((pq + qr + rp)(t^2 - 2t + 1) + t^2 + 2t + 1\right) \ .$$

(b) Kann dieses Polynom (modulo Einheiten in $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$) identisch mit dem Alexander-Polynom des Unknotens sein?

Aufgabe 4*. Man zeige, dass eine ungetwistete Whitehead-Verdopplung $Wh(K)$ eines beliebigen Knotens K triviales Alexander-Polynom hat (d.h. modulo Einheiten identisch mit dem Polynom $\Delta(t) = 1$ ist).

Hinweis: Es gibt eine Seifert-Flche von Geschlecht 1 von $Wh(K)$, die innerhalb einer Volltorus-Umgebung von K liegt.