2. Übungsblatt

Dr. Raphael Zentner

Die mit einem (K) versehenen Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und spätestens am Mittwoch, dem 25. Oktober in der Vorlesung abzugeben.

Aufgabe 1 (K).

(a) Man zeige, dass der Achterknoten isotop zu seinem Spiegelbild ist.
(b) Man zeige, dass die beiden Knoten von Aufgabe 1 des 1. Übungsblattes Entknotungszahl 1 haben.

Aufgabe 2 (K).

(a) Man zeige, dass ein Knoten k, der ein Diagramm mit nur 2 Kreuzungen besitzt, der Unknoten ist.
(b) Ein Knoten k mit minimaler Kreuzungszahl $c(k) = 3$ ist äquivalent zum Kleeblattknoten oder seinem Spiegelbild.

Aufgabe 3. Sei k ein Knoten und D ein Diagramm von k mit n Kreuzungen. Man zeige, dass es ein $m \leq \frac{n-1}{2}$ gibt, so dass m Kreuzungswechsel in D zu einem Diagramm des Unknotens führen.

Aufgabe 4*. Sei k ein stückweiser linearer Knoten in $\mathbb{R}^3$. In der Vorlesung hatten wir orthogonale Projektionen $p : \mathbb{R}^3 \to E$ auf Ebenen E betrachtet und diese mit Paaren von antipodalen Punkten $(n, -n)$ auf $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ identifiziert.

(a) Sei eine Projektion $p : \mathbb{R}^3 \to E$ gegeben, so dass sich in der Projektion $p(k)$ drei Geradenstücke in einem Punkt schneiden, und dass sich je zwei davon transversal schneiden. Wir wollen auch annehmen, dass kein Vertex von k auf diesen Punkt abbildet. Man beschreibe ein 1-dimensionales Geradenstück auf S^2, das die Projetion p enthält, und so dass es für alle Projektionen in dieser 1-dimensionalen Familie von Projektionen eine Kreuzung von drei Geradenstücken gibt.

(b) Man zeige, dass es nur endlich viele orthogonale Projektionen $p : \mathbb{R}^3 \to E$ gibt, so dass sich im Bild $p(k)$ vier Geradenstücke in einem Punkt so schneiden, dass sich je zwei davon transversal schneiden.

In diesem Zusammenhang ist übrigens folgendes Ergebnis von Pannwitz aus dem Jahr 1933 interessant: Ist k ein nicht-trivialer stückweise linearer Knoten in $\mathbb{R}^3$, der nicht der Unknoten ist, dann gibt es eine Gerade L, die k in 4 Punkten trifft.