

3. ÜBUNGSBLATT

Dr. Raphael Zentner

Die mit einem (K) versehenen Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und spätestens am Mittwoch, dem 31. Oktober in der Vorlesung abzugeben.

Aufgabe 1. Man zeige, dass die in der Vorlesung gegebene Definition der Verschlingungszahl einer 2-komponentigen Verschlingung immer ganzzahlig ist.

Aufgabe 2 (K).

- (a) Im Gegensatz zur Kauffman-Klammer ist das Jones-Polynom eine Invariante von orientierten Verschlingungen. Wie ändert sich das Jones-Polynom eines orientierten Knotens, wenn man die Orientierung umkehrt?
- (b) Der Achterknoten 4_1 ist verschieden vom trivialen Knoten.
- (c) Man berechne das Jones-Polynom der beiden Knoten aus Aufgabe 1 des 1. Übungsblattes.
- (d) Wie ändert sich das Jones-Polynom einer mehrkomponentigen Verschlingung, wenn man die Orientierung einer Verschlingungskomponenten umdreht?
- (e) Die Borromäischen Ringe sind verschieden von der (trivialen) 3-komponentigen Verschlingung, die ein Diagramm besitzt, das aus dem Nebeneinanderstellen dreier Unknotendiagramme entsteht.

Aufgabe 3 (K). Sei L eine orientierte Verschlingung mit Diagramm D .

- (a) Man zeige, dass das Polynom

$$X(L) = (-a)^{3w(D)} \langle D \rangle \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}],$$

wobei $\langle D \rangle$ die Kauffman-Klammer von D und $w(D)$ die Verwindung von D ist, ein Polynom in a^2 und a^{-2} ist, dass also die Definition des Jones-Polynoms aus der Vorlesung wohldefiniert ist.

- (b) Man zeige, dass das Jones-Polynom einer n -komponentigen Verschlingung nur gerade Potenzen in $t^{\pm\frac{1}{2}}$ hat, wenn n ungerade ist, und nur ungerade Potenzen, wenn n gerade ist. Hinweis: Man kann hier das Lemma II.2.1 aus der Vorlesung benutzen, das insbesondere besagt, dass man einen Knoten durch Kreuzungswechsel in den Unknoten überführen kann. Ein entsprechendes Resultat gilt für Verschlingungen. Man überlegt sich außerdem, wie es mit der Anzahl der Komponenten der drei Verschlingungen L_+ , L_- und L_0 aus Satz III.1.7 steht.
- (c) Was ist $V(L)(1)$, das Jones-Polynom bei der 1 ausgewertet?

Aufgabe 4*.

- (a) Die Definition der Kauffman-Klammer aus der Vorlesung ist wohldefiniert.
- (b) Satz III.1.7 charakterisiert das Jones-Polynom.