7. Übungsblatt

Dr. Raphael Zentner

Die mit einem (K) versehenen Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und spätestens am Mittwoch, dem 28. November um 13 Uhr in den Briefkasten einzuwerfen oder am Mittwoch Morgen in der Vorlesung abzugeben.

Aufgabe 1 (K).

(a) Man zeige, dass der Achterknoten Brückenzahl 2 hat, indem man ein 2-Brücken-Diagramm angibt.

(b) Man gebe für die Torusknoten $T(2, n)$ mit $n \geq 1$ ein Diagramm mit 2 Brücken an.

Aufgabe 2 (K).

(a) Man zeige, dass jeder (nicht-triviale) Torusknoten prim ist. Hinweis: Jeder Torusknoten liegt auf der Oberfläche eines 2-dimensionalen Torus, der in S^3 als Verdickung eines Unknotens gegeben ist. Eine eingebettete 2–Sphäre $S^2 \hookrightarrow S^3$ in 'allgemeiner Lage' schneidet diesen Torus in endlich vielen Kreisen. Jeder dieser Kreise kann a priori die Eigenschaft haben, den Torus in zwei disjunkte Teilmengen oder in eine zusammenhängende Teilmenge zu zerlegen. Man untersuche die möglichen sich ergebenden Schnitte dieser Kreise mit dem Torusknoten.

(b) Man zeige, dass jeder 2-Brücken-Knoten prim ist. Dabei soll Proposition IV.4.2 aus der Vorlesung nicht verwendet werden.

(c) Man zeige, dass die Summe von zwei 2-Brücken-Knoten Brückenzahl 3 hat. (Dies beweist Proposition IV.4.2 aus der Vorlesung im einfachsten nicht-trivialen Fall)

Aufgabe 3.

(a) Man zeige, dass es eine Einbettung des Unknotens $i : S^1 \to \mathbb{R}^3$ gibt, so dass für alle $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ die Funktion

$$\begin{aligned} S^1 &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto i(t) \cdot v \end{aligned}$$

mehr als ein lokales Maximum hat. Eine Skizze mit einem Argument genügt.

(b) Man zeige, dass für die Verworfenheit μ von Knoten folgende Ungleichung für die Addition von zwei Knoten K und L gilt:

$$\mu(K + L) \leq \mu(K) + \mu(L) - 1$$

Dabei soll nicht benützt werden, dass die Verworfenheit eines Knotens mit seiner Brückenzahl übereinstimmt.

Aufgabe 4 *. Ein Knoten mit Brückenzahl 2 ist alternierend.